MĀJAS DARBA ATRISINĀJUMI

1. uzdevums

Dota slīpā telts funkcija

$$T_a(x)=\begin{cases} ax, & 0\le x\le \dfrac{1}{a},\\ \dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a}{a-1}x, & \dfrac{1}{a}<x\le 1.\end{cases}$$

1) Kādām a vērtībām telts virsotne neiziet ārpus vienības intervāla? (Tas ir, tiešām veidojas „telts”.)

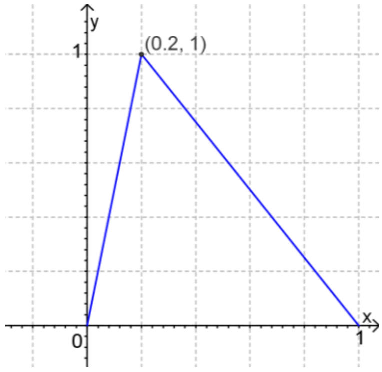
2) Izpētīt funkciju attiecībā uz periodiskajiem punktiem pie parametra vērtības $a=5$:

- **a)** uzzīmēt grafiku,
- **b)** noskaidrot nekustīgos punktus,
- **c)** noskaidrot otrās iterācijas funkciju $T_5^2(x)$,
- **d)** atrast periodiskos punktus ar periodu 2,
- **e)** atrast vienu no cikliem, kas sastāv no periodiskiem punktiem ar pirmperiodu 3.

Atrisinājums

1) Telts attēlojums neiziet ārpus vienības intervāla, ja $a\in(1;+\infty)$.

2) **a)**



$$T_5(x)=\begin{cases} 5x, & 0\le x\le \dfrac{1}{5},\\ \dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{4}x, & \dfrac{1}{5}<x\le 1.\end{cases}$$

b) Nekustīgie punkti:

$$\begin{cases} 5x=x, \quad 0\le x\le \dfrac{1}{5} & \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=0}}\\ \dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{4}x=x, \quad \dfrac{1}{5}<x\le 1 & \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=\dfrac{5}{9}}}\end{cases}$$

c) $$T_5^2(x)=\begin{cases} 5\cdot 5x, & 0\le x\le \dfrac{1}{25}\\ \dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{4}\cdot 5x, & \dfrac{1}{25}<x\le \dfrac{1}{5}\\ \dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{4}\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{4}x\right), & \dfrac{1}{5}<x\le \dfrac{21}{25}\\ 5\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{4}x\right), & \dfrac{21}{25}<x\le 1\end{cases}$$ jeb $$T_5^2(x)=\begin{cases} 25x, & 0\le x\le \dfrac{1}{25}\\ \dfrac{5}{4}-\dfrac{25}{4}x, & \dfrac{1}{25}<x\le \dfrac{1}{5}\\ -\dfrac{5}{16}+\dfrac{25}{16}x, & \dfrac{1}{5}<x\le \dfrac{21}{25}\\ \dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{4}x, & \dfrac{21}{25}<x\le 1\end{cases}$$

d) Periodiskie punkti ar periodu 2:

$25x = x \quad \Rightarrow \quad x = 0$ (nekustīgais punkts)

$\frac{5}{4} - \frac{25}{4}x = x \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{5}{29}}}$

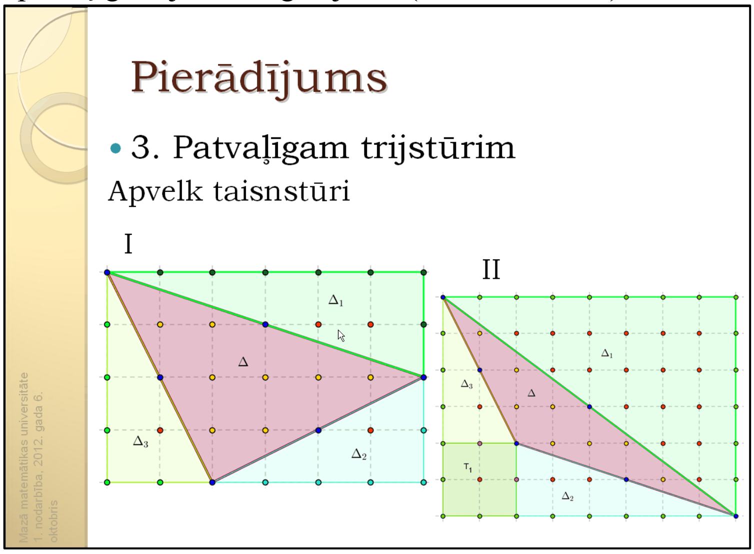
$\frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{25}{16}x = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{9}$ (nekustīgais punkts)

$\frac{25}{4} - \frac{25}{4}x = x \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{25}{29}}}$

e) Vispār ir divi cikli: $\left\{\frac{125}{129}; \frac{5}{129}; \frac{25}{129}\right\}$ un $\left\{\frac{5}{109}; \frac{25}{109}; \frac{105}{109}\right\}$

2. uzdevums

Pierādīt Pīka formulu patvaļīga trijstūra II gadījumā (skat. 10. slaidu).



Atrisinājums

Apzīmēsim režģa punktu skaitu katras daļas iekšpusē un uz kontūra kā parādīts tabulā un izteiksim lielā taisnstūra T iekšējo režģa punktu skaitu un režģa punktu skaitu uz kontūra:

	Iekšējie punkti	*Kontūra punkti*
Δ	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{r}$
Δ_1	$\boldsymbol{i_1}$	$\boldsymbol{r_1}$
Δ_2	$\boldsymbol{i_2}$	$\boldsymbol{r_2}$
Δ_3	$\boldsymbol{i_3}$	$\boldsymbol{r_3}$
T_1	$\boldsymbol{i_4}$	$\boldsymbol{r_4}$
T	$\boldsymbol{i_T} = i + i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + r + \frac{r_4}{2} - 4$	$\boldsymbol{r_T} = r_1 + r_2 + r_3 - r$

Ievērosim, ka $S_T = S_\Delta + S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + S_{\Delta_3} + S_{T_1}$

Taisnstūriem un taisnleņķa trijstūriem Pīka formula ir patiesa, tātad

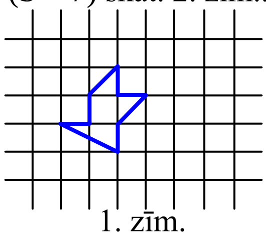
$$\left(i + i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + r + \frac{r_4}{2} - 4\right) + \frac{r_1 + r_2 + r_3 - r}{2} - 1 =$$

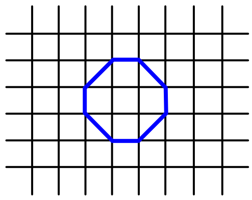
$$= S_\Delta + \left(i_1 + \frac{r_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{r_2}{2} - 1\right) + \left(i_3 + \frac{r_3}{2} - 1\right) + \left(i_4 + \frac{r_4}{2} - 1\right)$$

Tātad $S_\Delta = i + \frac{r}{2} - 1$, k.b.j.

3. uzdevums
Atrast **a)** ieliektu, **b)** izliektu 8-stūri (kura virsotnes atrodas režģa punktos) ar vismazāko laukumu.

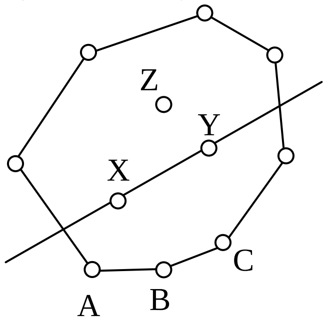
Atrisinājums
a) (S = 3) skat. 1.zīm.; **b)** (S = 7) skat. 2. zīm..


1. zīm.

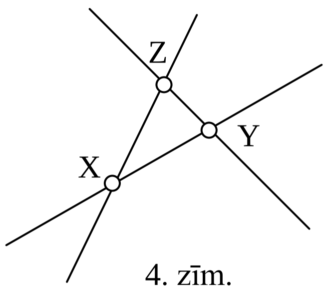

2. zīm.

4. uzdevums
Pamatot, ka 3. uzdevuma a) un b) gadījumos atrastās vērtības ir mazākās iespējamās.

Atrisinājums
a) Uz 8-stūra kontūra ir vismaz 8 režģa punkti (virsotnes), tātad no Pīka formulas seko, ka 8-stūra laukums $S \geq 0 + \frac{8}{2} - 1 = 3$. Līdz ar to atrastā vērtība S = 3 ir mazākā iespējamā.
b) Vispirms pierādīsim, ka izliektam 8-stūrim ir vismaz četri iekšēji režģa punkti.
Tā kā izliektam piecstūrim ir vismaz viens iekšējs režģa punkts, tad arī izliektam 8-stūrim ir vismaz 1 iekšējs režģa punkts (jo piecas no 8-stūra virsotnēm veido izliektu piecstūri). Apzīmēsim šo punktu ar X un novilksim caur to taisni. Vienā pusē no šīs taisnes atrodas vismaz četras 8-stūra virsotnes (virsotne var atrasties arī uz novilktās taisnes). Šīs četras virsotnes kopā ar punktu X veido izliektu piecstūri, tā iekšpusē savukārt ir vismaz viens režģa punkts Y, tātad 8-stūra iekšpusē ir vismaz 2 režģa punkti.
Caur punktiem X un Y novilksim taisni. Atkal vismaz vienā pusē no tās ir vismaz četras 8-stūra virsotnes. Šīs četras virsotnes kopā ar punktu X veido izliektu piecstūri, kura iekšpusē ir vismaz viens režģa punkts Z (skat. 3. zīm.).



3. zīm.



4. zīm.

Ja 7-stūrī ir trīs iekšēji punkti X, Y un Z, tad savienojam šos punktus ar taisnēm XY, YZ un ZX, (skat. 4. zīm.). Ja visi trīs punkti atrastos uz vienas taisnes, tad, spriežot tāpat kā iepriekš, iegūtu izliektu piecstūri, kura iekšpusē ir vismaz viens režģa punkts, tātad 8-stūra iekšpusē ir vismaz 4 iekšējie režģa punkti.
Ja punkti X, Y un Z neatrodas uz vienas taisnes, tad no trīs taisnēm XY, YZ un ZX izvēlamies to, kuras vienā pusē ir vismaz trīs 8-stūra virsotnes un kuras otrā pusē ir trijstūris XYZ. Tāda taisne vienmēr eksistē. (Ja katrai taisnei XY, YZ un ZX taisnes tajā pusē, kura nesatur trijstūri XYZ, būtu tikai divas 8-stūra virsotnes, tad tās kopā nevarētu veidot 8-stūri.) Izvēlētās taisnes divi punkti kopā ar 8-stūra trīs virsotnēm veido izliektu piecstūri (3. zīmējumā tas ir piecstūris ABCYX), kura iekšienē ir vismaz viens režģa punkts. Tātad izliekta 8-stūra iekšpusē ir vismaz 4 režģa punkti. No iepriekš pierādītā un no Pīka formulas izriet: $S \geq 4 + \frac{8}{2} - 1 = 7$.