Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes", 1999

LATVIJAS REPUBLIKAS 26. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

26.1. Aritmētiskajā progresijā $a_p = q^2, a_q = p^2, p, q$ -- dotie naturālie skaitļi, a_n -- progresijas n-tais loceklis.

1) Aprēķināt a_{50}, ja $p = 5$, $q = 9$.

2) Izteikt vispārīgajā veidā a_n atkarībā no p, q, n.

26.2. Krava iesaiņota vairākās kastēs. Tās svars kopā ar taru ir 13,5 t. Katras pilnas kastes svars nepārsniedz 350 kg. Pierādīt, ka šo kravu var pārvest ar 11 pusotras tonnas mašīnām, veicot ar katru tikai vienu reisu.

26.3. Trijstūrī ABC dotas malas $AC = b$, $AB = c$ un zināms, ka $\angle A = 2\angle B$.
Aprēķināt BC.

26.4. Atrast un attēlot koordinātu plaknē visu to punktu kopu, kuru koordinātas apmierina nevienādību $|x+1| - |y-1| < 1$.

26.5. Šaurleņķa trijstūrī ABC dots tāds punkts P, ka
$\angle APB = \angle ACB + 60°$, $\angle BPC = \angle \mathrm{BAC} + 60°$, $\angle CPA = \angle CBA + 60°$.
Pierādīt, ka punkti, kuros nogriežņu AP, BP, CP pagarinājumi aiz punkta P krustojas ar trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju, ir vienādmalu trijstūra virsotnes.

9. klase

26.6. Jānītim jārisina vienādojums, kuram labajā pusē ir sešu ciparu skaitlis. Nejauši uz šī skaitļa uzkrīt tintes traips, tādēļ divi vidējie cipari kļuva nesalasāmi. Palīdziet Jānītim noskaidrot, kādiem jābūt šiem cipariem, ja zināms, ka vienādojuma atrisinājums ir vesels skaitlis un vienādojums ir $37(72+3x) = 14{*}{*}45$.

26.7. No daļas $\frac{a}{b}$ atļauts iegūt jebkuru no trim daļām $\frac{a+b}{b}$, $\frac{a-b}{b}$ un $\frac{b}{a}$. Vai ir iespējams ar šīm operācijām no daļas $\frac{1}{2}$ iegūt $\frac{67}{91}$? Ja iespējams, tad parādīt, kā to izdarīt.

26.8. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\frac{x}{y}=6 \\ \left(x^2-y^2\right)\frac{y}{x}=1 \end{cases}.$$

26.9. Izliektā četrstūrī nogriežņu garumu summa, kuri savieno četrstūra pretējo malu viduspunktus, ir vienāda ar pusperimetru. Pierādīt, ka šis četrstūris ir paralelograms.

26.10. Plaknē doti pieci punkti, no kuriem nekādi trīs neatrodas uz vienas taisnes. Jebkuri divi no šiem punktiem savienoti viens ar otru vai nu ar sarkanu, vai zilu nogriezni tā, ka nekādi trīs vienas krāsas nogriežņi neveido trijstūri. Pierādīt, ka no katra punkta iziet tieši divi zili nogriežņi, turklāt vienas krāsas nogriežņi veido slēgtu līniju, kura satur visus piecus punktus. Parādīt, kādā veidā šī savienošana ir iespējama.

10. klase

26.11. Aprēķināt izteiksmes $2^{\sqrt{\log_2 3}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}$ skaitlisko vērtību, nelietojot tabulas.

26.12. Dota kaste ar pūdercukuru, svari un 1g atsvars. Kā ar vismazāko svēršanu skaitu var nosvērt 1 kg cukura?

26.13. No daļu pāra $\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$ ir iespējams iegūt jebkuru no trijiem daļu pāriem $\left(\frac{a+b}{b},\frac{c+d}{d}\right)$, $\left(\frac{a-b}{b},\frac{c-d}{d}\right)$ un $\left(\frac{b}{a},\frac{d}{c}\right)$. Vai iespējams no pāra $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ iegūt pāri $\left(\frac{5}{6},\frac{7}{8}\right)$?

26.14. Vienādsānu trijstūra pamata leņķis ir 2α. Caur sānu malas viduspunktu vilkta taisne, kas veido ar to leņķi α. Aprēķināt trijstūra daļu laukumu attiecību, kādos to sadala šī taisne. Kādam jābūt α, lai šī attiecība būtu 7 : 1?

26.15. Vai kubu ar izmēriem $6\times6\times6$ var uzbūvēt no 27 ķieģeļiem, kuriem ir taisnstūra paralēlskaldņa forma, bet izmēri ir $1\times2\times4$?

11. klase

26.16. Plaknē dotas divas vienādas riņķa līnijas ar rādiusu R, kas savstarpēji pieskaras. Katrā riņķa līnijā ievilkts regulārs sešstūris. Atrast visu to nogriežņu kvadrātu summu, kas savieno viena sešstūra virsotnes ar otra sešstūra virsotnēm.

26.17. Taisnstūra paralēlskaldnī $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ir zināms, ka $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Atrast divplakņu kakta leņķi starp plaknēm AB_1D_1 un ABC_1D_1.

26.18. Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem skaitļa 2^n ciparu summa ir 5.

26.19. Kādām x un y vērtībām izteiksme

$$\left(2\cos t + \tfrac{1}{2}\cos x\cos y\right)\cos x\cos y + \cos x - \cos y + \cos 2t$$

ir lielāka par -1 visām t vērtībām ? Attēlot koordinātu plaknē atbilstošos punktus (x, y).

26.20. Pierādīt nevienādību $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. klases

26.21. Punkti A un B atrodas uz vienas upes. Plosts aizpeld no A uz B 24 stundās. Motorlaiva ceļu no A uz B un atpakaļ veic ne ātrāk kā 10 stundās. Ja motorlaivas ātrumu palielinātu par 40%, tad ceļu no A uz B un atpakaļ tā veiktu ne ilgāk kā 7 stundās. Cik ilgi motorlaiva brauktu no A uz B ar nepalielinātu ātrumu? Visas kustības ir vienmērīgas.

26.22. Trijstūra ABC malu garumi ir a, b, c. Tā iekšpusē ņemts punkts P ar šādu īpašību: trīs taisnes, kas vilktas caur P paralēli trijstūra malām, šķēlumā ar trijstūri veido trīs vienādus nogriežņus ar garumu x. Aprēķināt x.

26.23. Dots, ka n -- naturāls skaitlis. Pierādīt, ka $3n + 2$ un $7n + 5$ ir savstarpēji pirmskaitļi.

26.24. Plaknē novilktas četras taisnes, starp kurām nekādas divas taisnes nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. Ap katru no četriem trijstūriem, kas rodas no šīm taisnēm, apvilkta riņķa līnija. Pierādīt, ka tās visas krustojas vienā punktā.

26.25. Dotas deviņas monētas, astoņas no tām vienāda svara, bet devītā -- smagāka. Doti arī divi sviras svari. Vieni no tiem ir precīzi, bet otri neprecīzi. Ja uz abiem neprecīzo svaru kausiem uzliek vienādu skaitu monētu, tad svari paliek līdzsvarā neatkarīgi no tā, vai smagākā ir uzlikta uz viena no kausiem vai ne. Ja turpretī uz viena neprecīzo svaru kausa uzliek vairāk monētu nekā uz otra, tad neprecīzie svari izturas tāpat ka precīzie. Nav zināms, kuri svari ir precīzie, kuri neprecīzie. Vai ar trim svēršanām var atrast smagāko monētu?

10. klase

26.26. No daļu pāra $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ ir iespējams iegūt jebkuru no trijiem daļu pāriem $\left(\frac{a+b}{b}, \frac{c+d}{d}\right)$, $\left(\frac{a-b}{b}, \frac{c-d}{d}\right)$ un $\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right)$. Vai iespējams no pāra $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ iegūt pāri $\left(\frac{8}{10}, \frac{10}{12}\right)$?

26.27. Dots izliekts piecstūris. Tā diagonāles nošķeļ no piecstūra trijstūrus, kuru laukumi ir s, s, s, s, $\frac{3s}{2}$. Aprēķināt piecstūra laukumu.

26.28. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 6y^2 = 1$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos.

26.29. Doti 20 punkti, no kuriem nekādi 3 punkti neatrodas uz vienas taisnes. Daži no šiem punktiem jāsavieno ar taisnes nogriežņiem tā, lai neizveidotos neviens trijstūris ar visām trim virsotnēm dotajos punktos. Kāds ir maksimālais nogriežņu skaits, ko var novilkt, lai šī prasība izpildītos?

26.30. Naturālie skaitļi no 1 līdz 65 kaut kādā kārtībā uzrakstīti rindā. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties 9 skaitļus tā, ka tie ir uzrakstīti vai nu augošā, vai dilstošā kārtībā. Vai var garantēt, ka izdosies izvēlēties 10 skaitļus ar šādu īpašību?

11. klase

26.31. Volejbola turnīrā piedalījās 14 komandas. katra ar katru spēlēja vienu reizi; volejbolā neizšķirtu nav. Pierādīt, ka var atrast trīs tādas komandas *A*, *B*, *C*, ka katra no citām turnīrā spēlējušām komandām zaudējusi vai nu pret *A*, vai pret *B*, vai pret *C*.

26.32. Dots, ka $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$.

Aprēķināt $f\left(\dfrac{1}{m}\right)+f\left(\dfrac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{m-1}{m}\right)+f(1)$, ja *m* ir naturāls skaitlis.

26.33. Kubs, kura šķautnes garums ir *a*, rotē ap savu diagonāli. Aprēķināt rotācijas ķermeņa tilpumu.

26.34. Dots lineāls, kuram ir tikai viena taisna mala un tās garums nepārsniedz 1 cm. Izmantojot tikai šo lineālu, savienot ar taisni divus dotos punktus *A* un *B*, ja *AB* = 10 cm.

26.35. Pierādīt, ka eksistē tikai galīgs skaits tādu naturālu skaitļu *n*, ka skaitļa 5^n ciparu summa ir mazāka par 1976^{1976}.