Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 28. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

28.1. Kādām sakarībām jāpastāv starp skaitļiem *a* un *b*, lai vienādojumam

$$\frac{x}{a}-\frac{1}{bx-ax}-\frac{b}{a^2x-abx}=\frac{2}{a-b}$$

būtu reālas un dažādas saknes?

28.2. Autobuss pienāk galapunktā 17.00. Ja tā vidējo ātrumu izmainītu par 10 km/h, tad autobusa pienākšanas laiks galapunktā mainītos par 1 stundu vai par 1,5 stundām. Cikos autobuss izbrauca no sākumpunkta?

28.3. Caur punktu *O* novilktas divas savstarpēji perpendikulāras taisnes *a* un *b*, kuras savukārt krusto divas savstarpēji paralēlas taisnes tā, ka punkts *O* atrodas starp paralēlajām taisnēm. Paralēlo taišņu nogriežņiem, kas atrodas starp perpendikulārajām taisnēm, konstruēti viduspunkti. Caur šiem viduspunktiem novilkta taisne *c*. Pierādīt, ka taisne *c* iet caur punktu *O*. Vai uzdevuma apgalvojumu var pierādīt jebkuram divu krustisku taišņu *a* un *b* stāvoklim?

28.4. Vienādsānu trapeces diagonāle ar garāko pamatu veido leņķi α, bet ar sānu malu leņķi β. Ap šo trapeci apvilktās riņķa līnijas garums ir *R*. Aprēķināt trapeces laukumu.

28.5. Uz rūtiņu papīra, kura rūtiņas malas garums ir 1, uzzīmēta riņķa līnija, kas neiet caur nevienas rūtiņas virsotni. Tās centrs *O* atrodas kādas rūtiņas virsotnē un rādiuss garāks nekā 2. Sauksim rūtiņas virsotni par robežvirsotni, ja kaut viena no tai kaimiņos esošajām virsotnēm atrodas riņķa līnijas otrā pusē. Atrodiet starpību starp robežvirsotņu skaitu ārpus riņķa līnijas un robežvirsotņu skaitu tās iekšpusē.

9. klase

28.6. Apzīmēsim ar $x + y = a$, $xy = b$. Pierādīt šādu apgalvojumu: ja n ir naturāls skaitlis, $n > 1$, tad $x^n + y^n$ var izsacīt kā polinomu ar mainīgajiem a un b un veseliem koeficientiem. Piemēram, $x^2 + y^2 = a^2 - 2b$, $x^3 + y^3 = a^3 - 3ab$.

28.7. Vai vairāk ir tādu sešciparu skaitļu, kurus var izsacīt kā divu trīsciparu skaitļu reizinājumu, vai tādu, kurus šādā veidā nevar izsacīt?

28.8. Dots, ka $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-kx-b\right)=0$, k un b -- reāli skaitļi. Aprēķināt k un b.

28.9. Plaknē no viena punkta iziet trīs stari, kas dala plakni trijos leņķos; katra leņķa lielums mazāks kā 180°. Katra leņķa iekšpusē dots pa punktam. Ar cirkuļa un lineāla palīdzību konstruēt trijstūri, kura katra mala iet caur vienu no dotajiem punktiem, bet katra virsotne atrodas uz viena no dotajiem stariem.

28.10. No visiem četrstūriem ar dotajiem diagonāļu garumiem un doto leņķi starp diagonālēm atrast četrstūri ar vismazāko perimetru.

10. klase

28.11. Atrisināt vienādojumu $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

28.12. Atrast funkciju $f(x)$, kas apmierina šādus nosacījumus:

a) $f(x)$ ir definēta un nepārtraukta katrā skaitļu ass punktā;
b) $f(0) = 1$;
c) $f(1) = 0$.
Funkcija jādefinē ar formulu.

28.13. Taisnstūra piramīdas katras šķautnes garums ir 1 m. Vai iespējams uz piramīdas virsmas atzīmēt četrus punktus tā, lai uz katru piramīdas punktu varētu aiziet no kāda no atzīmētajiem punktiem, ejot tikai pa piramīdas virsmu un veicot ne vairāk kā 0,5 m?

28.14. Izsacīt katru naturālu skaitli no 1 līdz 20 (ieskaitot) ar tieši sešu sešnieku palīdzību, izmantojot iekavas un četru aritmētisko darbību zīmes.

28.15. No punktiem *A* un *B* dažādos laika momentos izbrauc viens otram pretī velosipēdists un motociklists. Viņi satiekas punktā *C*, tūlīt apgriežas un katrs brauc atpakaļ uz savu izejas punktu; nonākuši tur, viņi atkal tūlīt apgriežas un brauc viens otram pretī, kamēr satiekas punktā *D*, atkal tūlīt apgriežas utt. Zināms, ka AC = 5 km, CB = *10* km, AD = 6 km, DB = 9 km. Kādā attālumā no punkta *A* notiks abu braucēju 1978. satikšanās? Katra braucēja ātrums visu laiku ir nemainīgs.

11. klase

28.16. Trijstūra piramīdas *ABCD* augstuma *AH* pamats ir skaldnes *BCD* augstumu krustpunkts. Pierādīt, ka arī citu piramīdas augstumu pamati ir attiecīgo skaldņu augstumu krustpunkti.

28.17. Atrisināt vienādojumu

$$\sin 4x \sin x - \sin 3x \sin 2x = \frac{1}{2}\cos 3x + \sqrt{1-\cos x}.$$

28.18. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $3\cdot 2^x + 1 = y^2$.

28.19. Uz regulāra trijstūra *ABC* malas *AB* kā uz diametra konstruēta pusriņķa līnija ārpus trijstūra. Punkti *D* un *E* atrodas uz šīs riņķa līnijas un dala to trīs vienādos lokos. Pierādīt, ka nogriežņi *CD* un *CE* sadala malu *AB* trijos vienāda garuma nogriežņos.

28.20. Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka starp tām nav divu monētu ar vienādu svaru. Jūsu rīcībā ir sviras svari bez atsvariem. Uz katra svaru kausa var uzlikt vienu vai vairākas monētas un ar vienu svēršanu noskaidrot, kurš kauss smagāks. Kāds ir vismazākais svēršanu skaits, ar kuru noteikti pietiek, lai sakārtotu visas monētas svaru pieaugšanas kārtībā?

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. klases

28.21. Trijstūra *ABC* malu garumi ir *a*, *b*, *c*, turklāt $a \le b \le c$. Trijstūra laukums ir 1. Pierādīt, ka $b \ge \sqrt{2}$.

28.22. Skaitļi *a*, *b*, *c* ir pozitīvi un mazāki par 1. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ nepārsniedz 0,25.

28.23. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^2+8z=2y^2+3$.

28.24. Definēsim jaunu aritmētisku operāciju $*$ (zvaigznīte) : $a*b=1-\frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$. Piemēram, $1*2=\frac{1}{2}$, $4*4=0$, utt . Izmantojot tikai operāciju $*$, izsacīt $a+b, a-b,$ $a\cdot b, \frac{a}{b}$.

28.25. Uz rūtiņu papīra uzzīmēts taisnstūris ar izmēriem 2×6 rūtiņas. Vai var izkrāsot rūtiņu mezglu punktus, kas atrodas taisnstūra iekšpusē un uz tā kontūra (tādu punktu ir 21), divās krāsās tā, lai katrs mezglu punkts būtu izkrāsots vienā krāsā un nekādi četri punkti, kas nokrāsoti vienā krāsā, nebūtu taisnstūra virsotnes, kura malas paralēlas rūtiņu līnijām?

10. klase

28.26. Četrstūrī *ABCD* malu *AB* un *CD* pagarinājumu krustpunkts ir *M*, bet diagonāļu *AC* un *BD* viduspunkti ir *E* un F. Pierādīt, ka punkti *M*, *E* un *F* neatrodas uz vienas taisnes.

28.27. Vai eksistē tāds polinoms ar diviem mainīgajiem $P(x,y)$, ka vienlaikus ir spēkā divas īpašības:

a) visiem reāliem skaitļiem *x* un *y* izpildās nevienādība $P(x,y)>0$,

b) ja *a* -- pozitīvs skaitlis, tad eksistē tādi reāli *x* un *y*, ka $P(x,y)=a$?

28.28. Atrast pēc iespējas lielāku naturālu skaitli *n* ar šādu īpašību: naturālos skaitļus, no 1 līdz *n* ieskaitot, var sadalīt 2 grupās tā, ka neviena grupa nesatur aritmētisku progresiju ar četriem locekļiem.

28.29. Virkni (a_n) definē ar formulu

$$a_n=\frac{1}{5^1}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{5^{27}}+\cdots+\frac{1}{5^n}.$$

Pierādīt, ka virknei (a_n) eksistē robeža, un šī robeža ir iracionāls skaitlis.

28.30. Atrast visus naturālos skaitļus, kurus nevar izsacīt kā dažu (vairāk kā viena) pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu.

11. klase

28.31. Dots, ka $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 0$, *m* un *M* -- mazākais un lielākais no skaitļiem $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Pierādīt, ka
$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 \leq -kmM$.

28.32. Kādam izliektam daudzskaldnim piemīt šāda īpašība: tā iekšpusē atrodas tāds punkts *O*, ka jebkura plakne, kas iet caur *O*, dala daudzskaldni divās vienlielās daļās. Pierādīt, ka *O* ir daudzskaldņa simetrijas centrs.

28.33. Parkā ir 4 taisni celiņi. Nekādi 2 no tiem nav paralēli un nekādi 3 neiet caur vienu punktu. Pa katru celiņu ar konstantu ātrumu iet gājējs. Ir zināms, ka 1. gājējs satiekas ar 2., 3. un 4. gājēju, 2. gājējs satiekas ar 3. un 4. gājēju. Pierādīt, ka arī 3. gājējs satiekas ar ceturto.

28.34. *p* ir pirmskaitlis, *p* > 5. Pierādīt, ka bezgalīga decimāldaļā $\frac{1}{p}$ perioda ciparu summa dalās ar 9.

28.35. Skat. 28.28. uzdevumu.