Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 29. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

29.1. Ar kādām parametra *a* vērtībām vienādojuma $ax^2+(a+2)x+(a+1)=0$ abas saknes ir pozitīvi skaitļi?

29.2. Vai regulāra trijstūra iekšpusē var atrasties punkts, kura attālumi līdz šī trijstūra virsotnēm ir 1 cm, 1 cm un 2 cm?

29.3. Trijstūrī *ABC* leņķis *ABC* = 60°. Leņķu *BAC* un *BCA* bisektrises krusto trijstūra pretējās malas attiecīgi punktos *M* un *N*, bet savā starpā tās krustojas punktā *O*. Pierādīt, ka *OM* = *ON*.

29.4. Skaitļi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ ir veseli pozitīvi skaitļi un $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=1001$. Kādas vērtības var būt skaitļu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ lielākajam kopīgajam dalītājam?

29.5. Visi naturāli skaitļi, sākot ar 1, pēc kārtas uzrakstīti "pa spirāli" rūtiņu lapā, kā parādīts 29.1. zīmējumā. Aplūkosim iezīmētos skaitļus, kas atrodas horizontālē; tie veido virkni. Šajā virknē pirmie četri locekļi ir $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 11$, $a_4 = 28$. Atrast formulu, kas izsaka virknes vispārīgo locekli a_n atkarībā no *n*.

37	36	35	34	33	32	31		
38	17	16	15	14	13	30		
39	18	5	4	3	12	29		
40	19	6	**1**	**2**	**11**	**28**		
41	20	7	8	9	10	27		
42	21	22	23	24	25	26	51	
43	44	45	46	47	48	49	50	

29.1. zīm.

9. klase

29.6. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)x = 68 \\ \left(x^2+y^2\right)y = 17. \end{cases}$$

29.7. Atrisināt vienādojumus

1) $|x-2|+|x|=1$;

2) $f(1-x)+f(x)=5$, kur $f(x)=\begin{cases} 3-x, & \text{ja } x<1 \\ 2x, & \text{ja } x \geq 1. \end{cases}$

29.8. Aplūkojam skaitļu virkni (a_n), kurā $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ un visiem naturāliem n ir spēkā sakarība $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$. Pieņemsim, ka eksistē $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Aprēķināt šo robežu.

29.9. Doti n dažādi punkti $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tiek aplūkoti visi vektori $\overrightarrow{A_iA_j}$ ($i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$; $i \neq j$). Pierādīt, ka

a) starp tiem ir vismaz $2n - 2$ dažādi vektori;

b) var izvēlēties punktus $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tā, lai starp minētajiem vektoriem būtu tieši $2n - 2$ dažādi vektori.

29.10. Piecstūra *ABCDE* iekšpusē ņemts patvaļīgs punkts *M*. Pierādīt, ka punkta *M* attālumu summa līdz taisnēm, uz kurām atrodas piecstūra malas, nav atkarīga no *M* stāvokļa piecstūra iekšpusē, ja

a) *ABCDE* ir regulārs piecstūris;

b) piecstūra *ABCDE* visi iekšējie leņķi ir savā starpā vienādi, bet malas nav vienādas.

10. klase

29.11. Pierādīt identitāti $\cos^2\alpha-\sin^2\beta+\cos^2(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$.

29.12. Aprēķināt

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

29.13. Trijplakņu kaktam konstruētas triju virsotņu leņķu bisektrises. Caur katru no šīm bisektrisēm perpendikulāri tai trijplakņu kakta skaldnei, kurā bisektrise atrodas, konstruēta plakne. Pierādīt, ka trīs šādi konstruētas plaknes iet caur vienu taisni.

29.14. Atrast izteiksmes $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ mazāko iespējamo vērtību, ja $1\le a\le b\le c\le d\le 100$.

29.15. Dota bezgalīga rūtiņu lapa. Katrā rūtiņā jāieraksta viens naturāls skaitlis. Turklāt skaitlis 1 jāieraksta vienā rūtiņā, skaitlis 2 -- divās rūtiņās, skaitlis 3 -- trīs rūtiņās, ... , skaitlis *n* -- *n* rūtiņās, ... Vai var ierakstīt skaitļus tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība būtu vai nu 1, vai 2?

11. klase

29.16. Atrisināt vienādojumu $(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x$.

29.17. Trijstūra piramīdas augstumu garumi ir h_1, h_2, h_3, h_4, bet piramīdā ievilktās lodes rādiusa garums ir *r*. Pierādīt, ka $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$.

29.18. Dots, ka *n* ir naturāls skaitlis. Pierādīt, ka skaitlis $6n+2$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

29.19. Dots, ka $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}$. Pierādīt, ka

a) $a_n > \ln\frac{2n+1}{n+1}$; b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

29.20.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
A		**84**	**87**	**77**	**82**	**78**	**93**	**86**
B			**85**	**54**	**65**	**51**	**59**	**81**
C				**69**	**73**	**76**	**75**	**67**
D					**96**	**53**	**56**	**58**
E						**91**	**63**	**61**
F							**79**	**57**
G								**94**
H								

A, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* ir pilsētas, dotajā tabulā ierakstītie skaitļi rāda, cik tūkstošus rubļu maksā ceļa uzbūvēšana no vienas pilsētas uz otru. Piemēram, rūtiņa, kas atrodas *C* rindiņas un *E* kolonas krustojumā, rāda, ka ceļa uzbūvēšanai no *C* uz *E* maksā 73 tūkst. rbļ. Kādi ceļi jāuzbūvē, lai pa tiem no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru un no kopējas būves izmaksas būtu vismazākās iespējamās? (No viena ceļa uz otru var nogriezties tikai pašās pilsētās; ceļu krustojumu ārpus pilsētām nav.) Pamatojiet savu izvēli.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. klase

29.21. Pierādīt, bezgalīgi daudziem pirmskaitļiem *p* var atrast tādus naturālus skaitļus *x* un *y*, ka $2x^2+2x+1=py$.

29.22. Cik virsotņu var būt daudzstūrim, kura visas diagonāles ir vienādas? Daudzstūris ir izliekts.

29.23. Dots, ka $n \geq 2$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$. Aprēķināt izteiksmes $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$ lielāko iespējamo vērtību.

29.24. Trijstūra *ABC* laukums ir 1. Spēlētājs *X* izvēlas punktu A_1 uz malas *BC*, pēc tam spēlētājs *Y* izvēlas punktu B_1 uz malas *AC*, pēc tam spēlētājs *X* izvēlas punktu C_1 uz malas *AB*. Spēlētājs *X* grib, lai trijstūra $A_1B_1C_1$ laukums būtu pēc iespējas lielāks, bet *Y* grib, lai tas būtu pēc iespējas mazāks. Kādu vislielāko trijstūra $A_1B_1C_1$ laukumu var nodrošināt spēlētājs *X* ?

29.25. Maijā klase devās trijos pārgājienos. Katrs skolnieks piedalījās vismaz vienā pārgājienā. Pirmajā pārgājienā zēnu bija ne vairāk kā puse dalībnieku, otrajā -- ne vairāk kā trešdaļa, trešajā -- ne vairāk ka ceturtdaļa. Klase pavisam ir 34 skolnieki. Kāds ir lielākais skaits zēnu, kas tajā var būt?

10. klase

29.26. Pieņemsim, ka esam pierādījuši, ka katram naturālam *n* izpildās vienādība $\sin nx = \sin x \cdot Q_{n-1}(\cos x)$, kur $Q_{n-1}(t)$ ir $(n-1)$- ās pakāpes polinoms ar mainīgo *t*. Pierādīt, ka polinoma Q_{n-1} koeficientu summa ir *n*.

29.27. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis *n* , ka n^2+1 dalās ar 5^{1979}.

29.28. Dota visur definēta un nepārtraukta funkcija $f(x)$, kas nav konstante, un T_1 un T_2 ir tās periodi. Pierādīt, ka $\frac{T}{T_2}$ ir racionāls skaitlis. Vai to var apgalvot, ja f nav nepārtraukta?

29.29. Trijstūris *ABC* nav regulārs. Tajā ievilktā riņķa līnija pieskaras tā malām punktos A_1, B_1, C_1. Trijstūrī A_1, B_1, C_1 ievilktā riņķa līnija pieskaras šī trijstūra malām punktos A_2, B_2, C_2 utt. Pierādīt, ka starp šiem trijstūriem nav līdzīgu.

29.30. Punkti A_1, B_1, C_1 pieder pie vienas taisnes un B_1 ir nogriežņa A_1C_1. Punkti A_2, B_2, C_2 arī pieder pie vienas taisnes, un B_2 ir nogriežņa A_2C_2 viduspunkts. Pierādīt, ka nogriežņu A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 viduspunkti atrodas uz viena taisnes.

11. klase

29.31. Funkcija $f(x)$ ir visur definēta, un tai eksistē atvasinājums visos skaitļu taisnes punktos. Pierādīt, ka eksistē tāda *x* vērtība, ka $f'(x) < 1 + (f(x))^2$, $|x| \le 2$. .

29.32. Vai var atrast plaknē 1979 punktus, no kuriem nekādi 3 neatrodas uz vienas taisnes un attālums starp jebkuriem diviem ir vesels skaitlis?

29.33. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu, kas nav izsakāmi kā 1979 naturālu skaitļu 1979-o pakāpju summas.

29.34. Dots, ka $p+q=1$, $0<p<1$, bet m un n ir naturāli skaitļi. Pierādīt, ka $\left(1-p^m\right)^n+\left(1-q^n\right)^m \geq 1$.

29.35. Divu cilindru rādiusu garumi ir 1, augstumu garumi ir 10, to asis ir perpendikulāras un krustojas augstumu viduspunktos. Aprēķināt abu cilindru kopējās daļas tilpumu.