Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 32. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

32.1. Pierādīt, ka neviens no skaitļiem
1) 101010101010101;
2) 101010101010 … 101 (1982 vieninieki un 1981 nulle) nav pirmskaitlis.

32.2. Izliektā četrstūrī *ABCD* punkti *M*, *N*, *K* un *L* ir attiecīgi malu *AB*, *BC*, *CD*, *DA* viduspunkti. Dots, ka $MK \perp NL$. Pierādīt, ka $AC = BD$.

32.3. Ar cipariem 1; 9; 8; 2, izmantojot tos katru tieši vienu reizi, kā arī vajadzīgajā daudzumā izmantojot kvadrātsaknes, saskaitīšanas, atņemšanas, reizināšanas, dalīšanas zīmes un iekavas, izsacīt visus naturālos skaitļus no 1 līdz 12 ieskaitot. Piemēram, 1 + 9 + 8 + 2 = 20.

32.4. Trijstūrī *ABC* novilkta leņķa *A* bisektrise *AK*. Dots, ka ap trijstūri *ABC* apvilktās riņķa līnijas un trijstūrī *ABK* ievilktās riņķa līnijas centri sakrīt. Aprēķināt trijstūra *ABC* leņķus.

32.5. Virkni (a_n) definē ar nosacījumiem $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ un $a_{k+3} = 2a_k + a_{k+1} + a_{k+2}$ katram naturālam *k*. Aprēķināt $a_1 + a_2 + \cdots + a_{98} + a_{99}$.

9. klase

32.6. Dots, ka *A* un *B* – naturāli skaitļi. Zināms, ka $A \cdot B$ ir trīsciparu skaitlis, kura visi cipari vienādi, bet $A + B$ ir divciparu skaitlis, kura abi cipari vienādi. Atrast *A* un *B*.

32.7. Pierādīt, ka kvadrātu var sagriezt *n* kvadrātos (to izmēri var būt gan dažādi, gan vienādi), ja $n \geq 6$.

32.8. Vai eksistē tāda virkne (a_n), ka vienlaikus ir spēkā šādi divi nosacījumi:

a) $\lim\limits_{t\to\infty} a_{6t+1} = 1$;

b) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{5k} = 2$? (*k* un *t* – naturāli skaitļi).

32.9. Plaknē doti *n* punkti, kas nokrāsoti sarkanā krāsā. No katra šī punkta ar paralēlu pārnesumu par vektoru $\vec{a}$ iegūts viens zils punkts (neviens zilais punkts nesakrīt ne ar vienu sarkano, un nekādi 3 no 2*n* punktiem neatrodas uz vienas taisnes); katru sarkano punktu savieno ar vienu zilo punktu, novelkot taisnes nogriezni (dažādus sarkanos punktus savieno ar dažiem zilajiem). Pierādīt, ka iegūto *n* taisnes nogriežņu garumu summa ir vismazākā tad, ja katrs sarkanais punkts savienots ar zilo punktu, kas no sarkanā iegūts ar paralēlo pārnesi.

32.10. Riņķis sadalīts 10 sektoros, katra sektora centra leņķa lielums ir 36°. Katrā sektorā atrodas pa vienai figūriņai. Ar vienu gājienu atļauts vienu figūriņu pārbīdīt vai nu uz blakus sektoru, vai arī uz pretējo sektoru. Vai šādā ceļā var savākt visas figūriņas vienā sektorā, izdarot tieši 1982 gājienus?

10. klase

32.11. Pierādīt identitāti

$\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=1+\sin 2\alpha \sin 2\alpha$.

32.12. Atrast visus tos *x*, kas vienlaikus apmierina nevienādības $0° < x < 90°$ un $\sin 2x > \sin 3x$.

32.13. Dota trijstūra piramīda *ABCD*.

a) Pierādīt, ka piramīdas šķēlums ar plakni, kas paralēla šķautnēm *AB* un *CD*, ir paralelograms (dots, ka šķēlums ir četrstūris).

b) Dots, ka piramīdas šķēlums ar plakni, kas paralēla *AB* un *CD*, ir taisnstūris, un arī šķēlums ar plakni, kas paralēla *AC* un *BD*, ir taisnstūris.

Pierādīt, ka arī šķēlums ar plakni, kas paralēla *AD* un *BC*, ir taisnstūris.

32.14. Apskatām 25 vektorus, kas savieno regulāra 25-stūra centru ar tā virsotnēm.

Cik un kādi no šiem vektoriem jāizvēlas, lai izraudzīto vektoru summas garums būtu lielākais iespējamais?

32.15. Dots, ka *a*, *b*, *c*, *d* – naturāli skaitļi. Pierādīt, ka $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ dalās ar 12.

11. klase

32.16. Atrisināt vienādojumu $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1$.

32.17. Izliektā četrstūrī *ABCD* malu *AB* un *CD* pagarinājumi krustojas punktā *E*, bet malu *AD* un *BC* pagarinājumi – punktā *F*. Dots, ka trijstūru *ADE* un *ABF* laukumi ir vienādi. Pierādīt, ka $BD \parallel EF$. (Abi trijstūri *ADE* un *ABF* satur četrstūri *ABCD.*)

32.18. Divi trijstūri *ABC* un $A_1B_1C_1$ novietoti telpā tā, ka taisnes AA_1, BB_1 un CC_1 ir paralēlas un neatrodas visas vienā plaknē. Pierādīt, ka piramīdu $ABCA_1$ un $A_1B_1C_1A$ tilpumi ir vienādi.

32.19. Funkcija $f(x)$ definēta visos nogriežņa [0; 1] punktos. Zināms, ka $f(0) = f(1) = 0$, un katriem *a* un *b* no [0; 1] pastāv nevienādība $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(a) + f(b)$.

a) Pierādīt, ka $f(x) = 0$ bezgalīgi daudziem *x* no nogriežņa [0; 1].

b) Vai eksistē tāda funkcija $f(x)$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un ne visos nogriežņa [0; 1] punktos ir 0?

32.20. Plaknē doti *n* punkti. Katri divi no tiem savienoti ar vienu līniju, kas nokrāsota balta, melna vai sarkana. Ir dots, ka ne no viena punkta neiziet visu triju krāsu līnijas, un nav tādu triju punktu, kurus visus pa pāriem savienotu vienas un tās pašas krāsas līnijas. Kāda ir lielākā iespējamā *n* vērtība?

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. Klase

32.21. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(y+z). \end{cases}$$

32.22. A, B, C, D, E, F ir izliekta sešstūra pēc kārtas ņemtu malu viduspunkti. Pierādīt, ka slēgtās lauztās līnijas *ABCDEFA* garums ir lielāks par šī sešstūra pusperimetru.

32.23. Vai iespējams ar šaha zirdziņu apiet visus lauciņus uz galdiņa ar izmēriem 4×1982 lauciņi tā, lai uz katra lauciņa zirdziņš nonāktu tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgrieztos uz tā lauciņa, uz kura atrodas sākumā?

32.24. Riņķa līnijā ievilkts regulārs 10-stūris un regulārs 9-stūris, pie tam neviena 10-stūra virsotne nesakrīt ne ar vienu 9-stūra virsotni. Pierādīt, ka starp lokiem, kuros daudzstūru virsotnes sadala riņķa līniju, vismaz viena loka lielums nepārsniedz 2°.

32.25. Vai var izrakstīt rindā

a) naturālos skaitļus no 1 līdz 4,

b) naturālos skaitļus no 1 līdz 8,

c) naturālos skaitļus no 1 līdz 16 tādā kārtībā, lai nekādu divu uzrakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais nebūtu vienāds ar kādu no skaitļiem, kas uzrakstīts starp tiem?

10. klase

32.26. Skaitļa $1982^{1982}+1$ ciparu summa ir A. Skaitļa A ciparu summa ir B. Skaitļa B ciparu summa ir C. Skaitļa C ciparu summa D. Atrast D.

32.27. Tenisa turnīrā piedalījās n vīrieši $2n$ jaunieši. Katrs dalībnieks ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi (neizšķirtu nebija). Kopējais vīriešu uzvaru skaits attiecas pret kopējo jauniešu uzvaru skaitu kā 7:5. Atrast n.

32.28. Dots, ka $0 < x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4 < 1$. Pierādīt nevienādību

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_1 < 2\,.$$

32.29. Vai plaknē var izvietot galīga skaita punktu sistēmu tā, lai katram punktam starp izvietotajiem punktiem būtu tieši 3 vistuvākie?

32.30. Dota kvadrātveida tabula, kas sastāv no 5×5 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru kvadrātu, kas satur 2×2 vai 3×3 rūtiņas, un katrā šī kvadrāta rūtiņā ierakstītajam skaitlim pieskaitīt vieninieku.
Vai noteikti var panākt, lai visās 25 rūtiņās ierakstītie skaitļi vienlaikus dalītos ar 5?

11. klase

32.31. Plaknē doti 1982 punkti, no kuriem nekādi trīs neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka var novilkt 991 taisni tā, lai tās sadalītu plakni tādos apgabalos, ka neviens apgabals nesatur vairāk par vienu doto punktu. Vai novelkamo taišņu skaitu, t.i., 991, nevar samazināt?

32.32. Kāds ir mazākais šaurleņķa trijstūru skaits, kādā var sagriezt kvadrātu? Neviena dalījuma trijstūra virsotne nedrīkst atrasties cita trijstūra malas iekšējā punktā.

32.33. Taisne *t* krusto trīs trijstūra piramīdas augstumus. Pierādīt, ka *t* krusto arī ceturto šīs piramīdas augstumu. (Ar piramīdas augstumu šeit saprotam taisni, kas iet caur virsotni perpendikulāri pretējai skaldnei.)

32.34. Dots, ka vienādojumam $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ ir četras dažādas reālas saknes. Pierādīt, ka $ab < 0$.

32.35. Katrā no trim valstīm dzīvo tieši *n* zinātnieki. Katrs no viņiem sarakstās ar tieši $n+1$ zinātniekiem no abām pārējām valstīm kopā. Pierādīt, ka var izvēlieties katrā valstī pa vienam zinātniekam tā, ka visi trīs izraudzītie zinātnieki savā starpā sarakstās.