Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 33. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

33.1. Cik ir tādu veselu pozitīvu skaitļu *x*, ka $3x+5$ dalās ar 7 un $x \le 1983$?

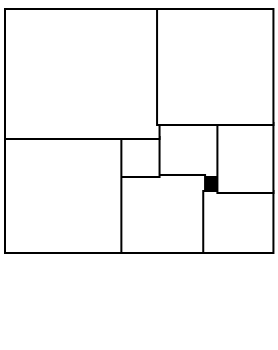
33.2. Dots ka *ABCD* – kvadrāts, *M* – malas *BC* viduspunkts, *N* – malas *CD* viduspunkts; *AM* un *BN* krustojas punktā *O*. Dots, ka trijstūra *BOM* laukums ir 1 cm^2. Atrast kvadrāta *ABCD* laukumu.

33.3. Dota skaitļu virkne (a_n), kurai $a_1 = 2$, bet katram naturālam n pastāv vienādība $a_{n+1} = 3a_n - 1$ .Aprēķināt

1) a_{1983},

2) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{1983}$.

33.4. Taisnstūris sadalīts kvadrātos tā, kā parādīts zīmējumā. Zināms, ka iekrāsotā kvadrāta laukums ir 1 mm^2. Atrast taisnstūra malu garumus.



33.1. zīm.

33.5. Uz galda atrodas 64 konfektes, kas kaut kā sadalītas vairākās kaudzītēs. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties 2 kaudzītes un

a) ja konfekšu skaits tajās ir vienāds, apvienot abas vienā kaudzītē;

b) ja konfekšu skaits abās izraudzītajās kaudzītēs nav vienāds, pārlikt no lielākās kaudzītes mazākajā tik konfekšu, cik mazākajā jau ir.

Pierādīt, ka, vairākas reizes atkārtojot šādus gājienus, visas konfektes var savākt vienā kaudzītē neatkarīgi no to sākotnējā sadalījuma. Vai šis apgalvojums ir spēkā, ja uz galda sākumā atrodas 56 konfektes?

9. klase

33.6. Trijstūra piramīdā *ABCD* skaldņu *ABC*, *BCD*, *ACD*, *ABD* mediānu krustpunktus apzīmējam attiecīgi ar D_1, A_1, B_1 un C_1. Pierādīt, ka $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}=\vec{0}$.

33.7. Vai eksistē tāda desmitstūra piramīda, ka var novilkt plakni, kura krusto 15 no šīs piramīdas šķautnēm? Vai plakne var krustot 16 no desmitstūra piramīdas šķautnēm?

33.8. Atrast pirmos 3 ciparus aiz komata skaitļa

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{1979\cdot 1981}+\frac{1}{1981\cdot 1983}$$

decimālajā pierastā.

33.9. Ar $R(n)$ apzīmējam naturāla skaitļa n visu ciparu reizinājumu. Piemēram, $R(6)=6,\ \ R(24)=8$

a) Aprēķināt robežu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R(n)}{n}$, ja ir dots, ka tā eksistē.

b) Pierādīt, ka minētā robeža eksistē.

33.10. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$x(x+2)(x+4)(x+6)-5^y=1983.$$

10. klase

33.11. Pierādīt identitāti

$$\cos^6\alpha-\sin^6\alpha=\cos 2\alpha\left(1-\tfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right).$$

33.12. (Šajā uzdevumā visi garumi ir izsacīti centimetros.)

Četrstūra visu malu garumi ir veseli skaitļi, bet tā perimetrs dalās ar katras malas garumu bez atlikuma. Pierādīt, ka vismaz divas šī četrstūra malas ir vienādas.

33.13. Dots, ka *ABCD* – paralelograms, *MN* || *AD*, *KL* || *AB*. Bez tam *S* ir *ML* viduspunkts, *T* ir *KN* viduspunkts, *O* – paralelograma *ABCD* diagonāļu krustpunkts, *P* -- *MN* un *LK* krustpunkts. Pierādīt, ka *PO* un *ST* krustojoties dalās uz pusēm.

33.14. Caur trijstūra piramīdas *ABCD* katras šķautnes viduspunktu perpendikulāri šai šķautnei novilkta plakne. Pierādīt, ka visas sešas novilktās plaknes krustojas vienā punktā.

33.15. Dots, ka n un k – naturāli skaitļi. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k = 1 \\ (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) = 2. \end{cases}$$

11. klase

33.16. Dots, ka $f(t)$ ir tāda funkcija, ka $\cos 5x = f(\cos x)$. Pierādīt, ka $\sin 5x = f(\sin x)$.

33.17. Regulāra 9-stūra centrs ir punkts *O*. Cik ir tādu trijstūru, kas pārklāj centru *O* un kuriem visas virsotnes ir dotā 9-stūra virsotnēs?

33.18. Caur sfēras centru novilktas vairākas plaknes. Tām šķeļoties ar sfēras virsmu, rodas riņķa līnijas; šīs riņķa līnijas sadala sfēras virsmu apgabalos. Apgabalu sauksim par trijstūri, ja to norobežo dažādu riņķa līniju trīs loki un tā iekšpusē nav citu riņķa līniju loku. Vai sākumā minētās plaknes var novilkt tā, lai veidotos

a) tieši 1983 trijstūri un nebūtu neviena cita veida apgabala;

b) tieši 1984 trijstūri un nebūtu neviena cita veida apgabala?

33.19. Starp skaitļiem $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ pa reizei sastopami skaitļi 1; 2; 3; …; n. Pierādīt, ka

$$\frac{a_1}{1^3} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots + \frac{a_n}{n^3} \geq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \ .$$

33.20. Divas dažādas riņķa līnijas savstarpēji pieskaras punktā *P*, pie tam viena no tām atrodas otras iekšpusē. Caur mazākās riņķa līnijas ω punktu *A*, kas atšķiras no *P*, novilkta šīs riņķa līnijas ω pieskare, tā krusto lielāko riņķa līniju punktos *B* un *C*. Pierādīt, ka $\angle BPA = \angle CPA$.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. Klases

33.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=2y \\ y+\dfrac{2}{y}=2z \\ z+\dfrac{2}{z}=2x. \end{cases}$$

33.22. Caur trijstūra *ABC* virsotnēm *A*, *B* un *C* attiecīgi novilktas paralēlas taisnes t_A, t_B un t_C. Taisne t_A krusto malu *BC* iekšējā punktā A_1, taisne t_B krusto malas *AC* pagarinājumu punktā B_1, bet taisne t_C krusto malas *AB* pagarinājumu punktā C_1. Pierādīt, ka trijstūra $A_1B_1C_1$ laukums ir divas reizes lielāks par trijstūra *ABC* laukumu.

33.23. Dots, ka *n*-ciparu skaitlis $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n}$, starp kura cipariem nav nuļļu, ir pirmskaitlis. Ne visi tā cipari ir vienādi. Pierādīt, ka visi *n* skaitļi $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}$, $\overline{a_2a_3\ldots a_{n-1}a_na_1}$, $\overline{a_3\ldots a_{n-1}a_na_1a_2}, \ldots, \overline{a_{n-1}a_na_1a_2\ldots a_{n-2}}$, $\overline{a_na_1a_2\ldots a_{n-1}}$ ir dažādi.

33.24. Kvadrātveida tabula sastāv no $n\times n$ rūtiņām ($n\geq 2$). Katrā rūtiņā ierakstīts pozitīvs skaitlis. Zināms, ka ne visi ierakstītie skaitļi savā starpā vienādi. Zināms arī, ka katrā rindiņā ierakstīto skaitļu summa ir 1 un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa arī ir 1. Pierādīt, ka var tā izvēlēties divas rindiņas un divas kolonnas, kas krustojoties veido "taisnstūra virsotnes", lai katrs no skaitļiem, kas ierakstīti vienas "diagonāles" galos, būtu lielāks par katru no skaitļiem, kas ierakstīti otras "diagonāles" galos.

33.25. Riņķa līnijā novilkta horda *AB*. Atrast uz riņķa līnijas tādu punktu *P*, lai $PA+PB$ būtu ar lielāko iespējamo vērtību.

10. klase

33.26. Dots, ka a, b, c ir kāda trijstūra malu garumi, kas izteikti centimetros, bet n – naturāls skaitlis. Pierādīt, ka arī $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}$ un $\sqrt[n]{c}$ ir kāda trijstūra malu garumi, kas izteikti centimetros.

33.27. Izliektā daudzskaldnī katrai skaldnei ir pāra skaits malu. Pierādīt, ka katrai slēgtai lauztai līnijai, kas iet pa daudzskaldņa šķautnēm, ir pāra skaits posmu.

33.28. Par skaitļu virkni (x_n) dots, ka $x_1 = 0$ un katram naturālam n pastāv vienādība

$$x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}\ .$$

Pierādīt, ka visi šīs virknes locekļi ir veseli skaitļi.

33.29. Plakne sadalīta kvadrātos kā rūtiņu lapa. Dots, ka *ABCDE* ir izliekts piecstūris, kura visas virsotnes atrodas kvadrātu virsotnēs. Pierādīt, ka šī piecstūra iekšpusē (ne uz tā kontūras!) atrodas vismaz viena kvadrāta virsotne.

33.30. Pierādīt, ka visiem reāliem x pastāv nevienādība

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} > 0\ .$$

11. klase

33.31. Pa apli izrakstīti daži (vismaz trīs) dažādi skaitļi. Katrs skaitlis vienāds ar abu tam blakus uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Cik skaitļu uzrakstīts?

33.32. Dots, ka $OA_1B_1C_1D_1$ un $OA_2B_2C_2D_2$ -- divi regulāri piecstūri, kas kaut kā novietoti telpā. Pierādīt, ka taisnes A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 visas ir paralēlas vienai plaknei.

33.33. Dots, ka vienādojumam

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

ir n dažādas saknes. Pierādīt, ka starp tām var atrast tādu sakni r, ka $|r| \geq \frac{|a_1|}{n}$.

33.34. Pierādīt, ka katram pirmskaitlim p var atrast tādus naturālus skaitļus x un y, ka x^2+y^2+1 dalās ar p.

33.35. Telpā doti 3n punkti. Nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes un nekādi 4 nepieder pie vienas plaknes. Tieši n no šiem punktiem nokrāsoti sarkani, tieši n – zili un tieši n – zaļi. Pierādīt, ka var izveidot n trijstūrus tā, ka katram trijstūrim viena virsotne ir sarkana, viena -- zila un viena – zaļa, un turklāt nekādiem diviem dažādiem trijstūriem nav kopīgu punktu.