Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 34. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

34.1. a) Šādi skaitļi veido aritmētisku progresiju ar 200 locekļiem, kurā pirmais loceklis ir 5 un pēdējais – 1000. Tāpēc $S_1 = \frac{5+1000}{2} \cdot 200 = 100500$.

b) Skaitļi, kas dalās ar 3, veido aritmētisku progresiju, kuras summa ir $S_2 = 166833$. Skaitļi, kas dalās ar 15, veido aritmētisku progresiju, kuras summa ir $S_3 = 33165$. Meklējamā summa ir $S_1 + S_2 - S_3 = 234168$.

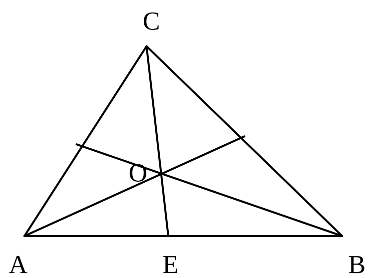
34.2. Vienādojumu pārveido formā

$$ax^2 + (a+b-1)x + b = 0 .$$

Tā diskriminants ir $D = (a+b-1)^2 - 4ab = (a-b)^2 - 2(a+b) + 1$. Varam izvēlēties $a - b = 1984$ un $a + b = 1984^2 + 1$; tad $D < 0$. Tātad *a* un *b* var atrast no sistēmas

$$\begin{cases} a - b = 1984 \\ a + b = 1984^2 + 1 . \end{cases}$$

34.2. No 4 trijstūriem ar vienādu laukumu divi atrodas pie vienas un tās pašas malas. Pieņemsim, ka tie ir *AOE* un BOE.



34.3. zīm.

Šiem trijstūriem augstums no virsotnes *O* ir viens un tas pats, tātad $AE = EB$. Tātad bisektrise *CE* ir arī trijstūra *ACB* mediāna. Tātad *ACB* ir vienādsānu trijstūris. Ar izvērstāku spriedumu var pierādīt, ka tas ir vienādmalu trijstūris.

34.4 Kuba stūri veido 3 kvadrāti; katriem diviem no tiem ir kopīga mala. Tātad katrā stūrī jāizmanto visas trīs krāsas, bet stūru pavisam ir 8.

Zīmējumā parādīts pareizi iekrāsota kuba virsmas izklājums.

M	S						
B	M						
M	B	S	B	M	S	B	S
B	S	B	M	S	B	S	M
S	M						
M	B						

34. 5. Apzīmējam monētas ar *A*, *B*, *C*, *D*, bet to masas ar *a*, *b*, *c*, *d*. Ar pirmo svēršanu nosveram *A* un *B*. Ja $a+b=18$ (resp. $a+b=20$), tad $a=b=9$ (resp. $a=b=10$); ar abām atlikušajām svēršanām nosveram atsevišķi *C* un *D*.

Ja $a+b=19$, tad ar otro svēršanu nosveram *A* un *C*. Ja $a+c=18$ (resp. $a+b=20$), esam noskaidrojuši *A* un *C* masas un varam aprēķināt arī *B* masu; ar trešo svēršanu nosveram *D*.

Atliek aplūkot gadījumu, kad arī $a+c=19$. Tad skaidrs, ka $b=c$. Ar trešo svēršanu nosveram *B*, *C* un *D*.

Ja $b+c+d=27$, tad $b=c=d=9$ un $a=10$.

Ja $b+c+d=28$, tad $b=c=9$ un $a=d=10$.

Ja $b+c+d=29$, tad $b=c=10$ un $a=d=9$.

Ja $b+c+d=30$, tad $b=c=d=10$ un $a=9$.

34.6. Aprēķinām, ka

$g(x)=3ax^2+2bx+c;$

$h(x)=6ax+2b;$

$t(x)=6a.$

No vienādības $t(6)=6$ atrodam $a=1$; tātad

$g(x)=3x^2+2bx+c$;

$h(x) = 6x + 2b$.

No vienādības $h(2) = 2$ atrodam $b = -5$; tātad

$g(x) = 3x^2 - 10x + c$.

No vienādības $g(3) = 3$ atrodam $c = 6$; tātad

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + d$.

No vienādības $f(1) = 1$ atrodam $d = -1$.

34.7. Punkts M ir punktu kopas A, B, C, D, E smaguma centrs.

a) Izvēlēsimies patvaļīgu punktu O un atradīsim vektoru summu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{a}$. Ja izvēlēsimies punktu M tā, ka $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\vec{a}$, tad prasītā vienādība izpildīsies.

b) Pieņemsim, ka atrasti divi tādi punkti M_1, M_2. Tad

$$\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{M_1C} + \overrightarrow{M_1D} + \overrightarrow{M_1E} = 0 \quad \text{un}$$

$$\overrightarrow{M_2A} + \overrightarrow{M_2B} + \overrightarrow{M_2C} + \overrightarrow{M_2D} + \overrightarrow{M_2E}.$$

Atņemot pirmo vienādību no otrās, iegūstam $5\overrightarrow{M_2M_1} = 0$; tātad punkti M_1 un M_2 sakrīt.

34.8. Piemēram der funkcija

$$f(t) = \begin{cases} t, \text{ ja } t \in Q \\ t + 1, \text{ ja t} \notin \text{Q} \end{cases}$$

34.9. Izvēlēsimies vienu cilvēku *A*. Ja eksistē tādi 4 cilvēki, kas nav pazīstami ar *A*, tad tie veido prasīto četrinieku.

Atliek aplūkot gadījumu, kad tādu 4 cilvēku, kas pazīstami ar *A*, nav. Tātad varam autobusā izdalīt 6 cilvēku grupu *S*, kurā visi pazīst *A*. Vienu no šīs grupas locekļiem apzīmēsim ar *B*.

1) *B* grupā *S* pazīst ne vairāk kā divus cilvēkus; tātad nepazīst vismaz trīs tās locekļus *X*, *Y*, *Z*. Tādā gadījumā *X*, *Y*, *Z* visi pazīst viens otru, un kopā ar *A* tie sastāda prasīto četrinieku.
2) *B* grupā *S* pazīst vismaz 3 cilvēkus *X*, *Y*, *Z*. Skaidrs, ka vismaz divi no tiem savā starpā pazīstami; pieņemsim, ka tie ir *X* un *Y*. Tad par prasītajiem 4 cilvēkiem var ņemt *A*, *B*, *X*, *Y*.

34.10. a) Ar pirmo jautājumu Andris noskaidro, vai šis skaitlis ir no 1 līdz 8, vai no 9 līdz 16. Paliek 8 skaitļi. Pēc otrā jautājuma paliks 4 skaitļi, pēc trešā – 2 skaitļi, pēc ceturtā – viens skaitlis.

c) Ar trim jautājumiem nepietiek, jo atbilžu variantu ir 8, bet skaitļu ir 16.

34.11.

$$\cos^8\alpha - \sin^8\alpha = \left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha\right)\left(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha\right) =$$
$$\left(\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) =$$
$$\left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)\cdot \cos 2\alpha$$

34.12. Apzīmēsim skaitļus, ar kuriem n nedalās, ar x un $x + 1$. Atzīmēsim divas šo skaitļu īpašības:

1) $x > 15$; pretējā gadījumā no tā, ka skaitlis n dalās ar $2x$, sekotu, ka tas dalās arī ar x.

2) x vai $x + 1$ nav izsakāmi kā divu savstarpēju pirmskaitļu a un b reizinājums. Pretējā gadījumā no skaitļa n dalāmības ar a un b sekotu tā dalāmība ar x vai $x + 1$.

Pārbaudot x vērtības no 16 līdz 30, redzam, ka der tikai vērtība 16. Tātad nepareizi ir apgalvojumi par dalāmību ar 16 un 17.

34.13. Aplūkosim divas kuba pretējās virsotnes X un Y, un tā centru O (tas ir nogriežņa XY viduspunkts). No teorēmas par trapeces viduslīniju seko, ka attālumu summa no X un Y līdz plaknei $\propto$ ir vienāda ar divkāršotu attālumu no O līdz $\propto$. Tātad, iekļaujot vienā grupā divus kuba pretējo virsotņu pārus, uzdevuma prasības būs izpildītas.

34.14. Pietiek ar $n-1$ lampām, kuras var novietot jebkurās $n-1$ labirinta virsotnēs. Tiešām, bez lampas paliek tikai viena virsotne, bet katram gaitenim ir gali divās virsotnēs. Parādīsim, ka ar mazāk lampām nepietiek. Pieņemsim, ka labirintā izvietotas $n-2$ lampas. Apskatīsim virsotni A, kurā lampa nav novietota un tos $n-1$ gaiteņus, kas iziet no A. Katra gaiteņa apgaismošanai vajag citu lampu (jo tiem nav citu kopīgu punktu bez A, bet punktā A lampa nav novietota. Tātad vajadzīgas vismaz $n-1$ lampas.

34.15. Pierādīsim, ka tā notiks gadījumā, ja pa apli izrakstīti 2^n skaitļi, n = 1; 2; 3; … , katrs no kuriem ir “+1” vai “-1”. Pierādījumā izmantosim matemātisko indukciju pēc n.

Ja n = 1, tad pēc divām operācijām abi skaitļi būs vienādi.

Pieņemsim, ka apgalvojums pierādīts, ja n = k. Apskatīsim situāciju, kad $n = k+1$. Apzīmēsim skaitļus pēc kārtas ar

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots, x_{2^k}, y_{2^k}.$$

Pēc pirmā gājiena rodas situācija

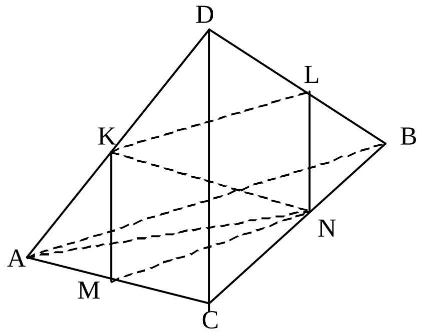
$$x_1 \cdot y_1,\ y_1 \cdot x_2,\ x_2 \cdot y_2,\ y_2 \cdot x_3, \ldots, x_{2^k} \cdot y_{2^k},\ y_{2^k} \cdot x_1 .$$

Ievērojot, ka $x_i^2 = y_i^2 = 1$, pēc otrā gājiena veidojas situācija

$$x_1 \cdot x_2,\ y_1 \cdot y_2,\ x_2 \cdot x_3,\ y_2 \cdot y_3, \cdots, x_{2^k} \cdot x_1,\ y_{2^k} \cdot y_1 .$$

Redzam, ka 2^{k+1} skaitļu gadījumā divi gājieni ir ekvivalenti vienam gājienam atsevišķi to 2^k skaitļu gadījumā, kas uzrakstīti pāra vietās: skaitļi x_i reizinās neatkarīgi no skaitļiem y_i un otrādi. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi tie katrs atsevišķi pārveidosies par vieniniekiem.

34.16.



34.4. zīm.

a) No trijstūra viduslīniju īpašības seko, ka $KM \parallel DC \parallel LN$. Tā $KM \parallel LN$, tad K, M, L, N atrodas vienā plaknē.

b) Daļu *AMNBLK* sadalām divās daļās: trijstūra piramīdā *AMNK* ar pamatu *AMN* un virsotni K, kā arī četrstūra piramīdā *AKLBN* ar virsotni *N* un pamatu *AKLB*. Trijstūra piramīdas *AMNK* pamata *AMN* laukums ir ceturtdaļa no lielās piramīdas *ABCD* pamata *ABC* laukuma, bet augstums no *K* -- puse no augstuma lielajā piramīdā no *D*. Tātad *AMNK* tilpuma ir $\frac{1}{8}$ no *ABCD* tilpuma. Līdzīgi *AKLB* laukums ir $\frac{3}{4}$ no *ABD* laukuma, bet augstums no *N* pret *AKLB* ir puse augstuma no *C* pret *ABD*; tātad *AKLBN* tilpums ir $\frac{3}{8}$ no *ABCD* tilpuma. Atliek ievērot, ka $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

34.17. Nevienādību ar identiskiem pārveidojumiem pārvēršam par

$$\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(e - \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0 ,$$

kas ir acīmredzami pareiza.

34.18. a) Ar identiskiem pārveidojumiem iegūstam:

$8\sin\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=$
$8\sin\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$
$2(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)\cdot\left(2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$
$2\cdot\sin2\alpha\cdot\cdot\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\sin2\alpha\cdot\cdot\cos2\alpha=\sin4\alpha.$

b) Ar matemātisko indukciju var pierādīt formulu

$$\sin\left(2^k\alpha\right)=2^{2^k-1}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\left(\alpha+1\cdot\frac{\pi}{2^k}\right)\cdot\sin\left(\alpha+2\cdot\frac{\pi}{2^k}\right)\cdot\sin\left(\alpha+3\cdot\frac{\pi}{2^k}\right)\cdot\dots\cdot\sin\left(\alpha+\left(2^k-1\right)\cdot\frac{\pi}{2^k}\right)$$

34.19. Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $1+2+3+\dots+n^2=\frac{n^2\left(n^2+1\right)}{2}$. Tātad $M(n)=\frac{n\left(n^2+1\right)}{2}$.

a) ja $n=1$, tad $M(n)=1$ un nav pirmskaitlis. Ja $n=2$ apskatāmā tabula neeksistē. Ja $n\geq3$ un n – pāra skaitlis, tad $M(n)$ sadalās reizinātājos $\frac{n}{2}\cdot\left(n^2+1\right)$, kas abi lielāki par 1, tātad $M(n)$ nav pirmskaitlis; . Ja $n\geq3$ un n – nepāra skaitlis, tad $M(n)$ sadalās reizinātājos $n\cdot\frac{n^2+1}{2}$, kas abi lielāki par 1, tātad $M(n)$ nav pirmskaitlis

c) mazākā n vērtība ir 3968.

34.20. Apskatīsim vispirms gadījumu, kad sienas kontūrs ir taisnstūris.
Kurmis varētu rīkoties šādi. Izlīdis, no zemes, viņš nostājas tā, ka siena ir pa labi, un sāk rāpot gar to. Pa ceļam kurmis skaita labos un kreisos pagriezienus tik ilgi, kamēr nonāk atpakaļ pie savas izraktās alas. Ja kurmis atrodas sienas iekšpusē, viņš būs saskaitījis 4 kreisos un 0 labos pagriezienus; ja kurmis atrodas sienas ārpusē, viņš būs saskaitījis 0 kreisos un 4 labos pagriezienus.

Viegli saprast, ka, līdzīgi rīkojoties patvaļīga kontūra gadījumā, starpība starp labo un kreiso pagriezienu skaitu kustības beigās būs 4, ja kurmis atrodas ārpusē, un būs (-4), ja viņš atrodas iekšpusē.

Tā kā kurmis māk skaitīt tikai līdz 10 un kustības laikā starpība starp labo un kreiso pagriezienu skaitu var kļūt patvaļīgi liela, tad kurmim jāskaita pēc moduļa 10.

34.21. Pieņemsim, ka dota progresija $a_k=ak+b$. Izvēlēsimies patvaļīgu pirmskaitli $p>a+b$. Tā kā a un p^2 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka $ax-p^2y=1$.

Apzīmēsim $n=(p-b)x$. Tad $a_n=a(p-b)x+b=p(p^2y-pby+1)$. Tātad a_n dalās ar *p*, bet nedalās ar p^2, un tas nevar būt vesela skaitļa pakāpe ar kāpinātāju, kas lielāks par 1. Ņemot skaitļus $n+p^2l$, iegūsim bezgalīgi daudz prasītos skaitļus.

34.22. Izdarām homotētiju ar centru punktā *B* un koeficientu 2. Tad ω_1 attēlojas par ω, tāpēc *A* attēlojas par kaut kādu ω punktu. No otras puses, *A* attēlojas par punktu, kas simetrisks punktam *B* attiecībā pret *A*, tātad – par riņķa līnijas ω_2 punktu (jo ω_2 un ω_1 ir simetriskas attiecībā pret *A*); Tātad *A* attēlojas par ω un ω_2 krustpunktu.

Tas nozīmē, ka *A*, *B* un viens no punktiem *P* un *Q* atrodas uz vienas taisnes.

34.23. Četrus kvadrātus tā var novietot (parādiet kā!).

Uzskatīsim, ka novietojamo kvadrātu malu garums ir 1; tad novietojamo kvadrātu centriem jāatrodas attālumā, mazākā par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ no abām koordinātu asīm (citādi tie nekrustotu koordinātu asis). Tātad šiem centriem jāatrodas kvadrātā ar malas garumu $\sqrt{2}$, kuru koordinātu asis dala četros mazos kvadrātos k_1,k_2,k_3,k_4. Ja būtu novietoti 5 kvadrāti, tad divu novietoto kvadrātu centri atrastos vienā no kvadrātiem k_i; bet tādā gadījumā šie kvadrāti šķeltos.

34.24. a) Nevar. Zirdziņa maršrutā krāsas mainās, tātad pēc 24 gājieniem tas būs nonācis uz 12 baltiem un 12 melniem lauciņiem. Bet ar šiem gājieniem viņam bija jānonāk uz 13 melniem un 11 baltiem lauciņiem (lauciņa *A* krāsa ir balta).

b) To var izdarīt (uzzīmējiet maršrutu!}.

34.25. To var izdarīt abos gadījumos.

34.26. Novietosim punktos *A*, *B*, *C*, *D* pa 1 kg masai; ar *O* apzīmēsim to masu centru. Punktā M_1 ir *B*, *C*, *D* masu centrs; tajā koncentrējas 3 kg. Punktu *O* var iegūt kā M_1 un *A* masas centru; pēc Arhimēda likuma *O* atrodas uz nogriežņa M_1A un $M_1O:OA=1:3$. Līdzīgas sakarības izpildās arī pārējiem punktiem. Tātad *O* ir $ABCD$ un $M_1M_2M_3M_4$ homotētijas centrs ar koeficientu $-\frac{1}{3}$.

34.27. Skaidrs, ka

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}\le\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\frac{1}{n\cdot(n-1)}=$$

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}<\frac{3}{4}.$$

34.28. Aplūkosim divus gadījumus.

a) $0 < B < \frac{\pi}{2}$. Tad $\cos B > 0$, $A > \sin A > 0$ un $A\cos B > \sin A\cos B$.

Tā kā $0 < C = \pi - (A + B) < \pi - B < \pi$, tad $\cos C > \cos(\pi - B) = -\cos B$. Tāpēc $A\cos B + \sin A\cos C > \sin A(\cos B + \cos C) > 0$.

Līdzīgi aplūko gadījumu, kad $\frac{\pi}{2} \le B < \pi$.

34.29. *Lemma*. Spēlētājs ar vislielāko uzvaru skaitu turnīrā ir šī turnīra čempions.

Pieņemsim, ka *A* ir visvairāk uzvaru, bet viņš nav čempions. Ar *X* apzīmēsim to cilvēku grupu, kas uzvarējuši *A*, bet ar *Y* -- , kas zaudējuši *A*. Tad *A* nav pārspējis kādu spēlētāju *B* no grupas *X*. Tas nozīmē, ka *B* ir uzvarējis visus spēlētājus no *Y*, kā arī spēlētāju *A*; bet tas nozīmē, ka *B* ir izcīnījis vairāk uzvaru par *A*. Tas ir pretrunā ar *A* izvēli.

Pieņemsim tagad, ka kādā turnīrā ir 2 čempioni *X* un *Y* , pie tam *X* ir uzvarējis pret *Y*. Aplūkosim to spēlētāju grupu, kas uzvarējuši *X* (tādi eksistē, jo *Y* ir čempions). Viegli pārbaudīt, ka šīs spēlētāju grupas apakšturnīra čempions arī ir visa turnīra čempions. Tātad ir vismaz 3 čempioni.

34.30. Tā kā $f(1) < f(2) = 2$, tad $f(1) = 1$. Tā kā $f(x)$ ir stingri augoša, tad $f(n+m) \ge f(n) + m$.

Apzīmēsim $f(3) = a$. Tad

$f(5) \ge a + 2$,

$f(15) = f(3\cdot 5) = f(3)f(5) \ge a(a+2) = a^2 + 2a$,

$f(18) = f(15+3) \ge a^2 + 2a + 3$.

No otras puses,

$f(6) = f(3)f(2) = 2a$,

$f(5) \le f(6) - 1 = 2a - 1$,

$f(10) = f(2)f(5) \le 4a - 2$,

$f(9) \le 4a - 3$,

$f(18) = f(2)f(9) \le 2(4a-3) = 8a - 6$.

Tātad, $a^2 + 2a + 3 \le 8a - 6 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 6a + 9 \le 0 \quad \Rightarrow \quad (a-3)^2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3$.

Tālāk ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka $f(2^k + 1) = 2^k + 1$.

Bāze, kad $k = 1$, ir pierādīta.

Induktīvā pāreja: $f(2^{k+1} + 2) = f(2)f(2^k + 1) = 2(2^k + 1) = 2^{k+1} + 2$; tāpēc

$$f(2^{k+1} + 1) \le 2^{k+1} + 1.$$

Tā kā $f(n) \ge n$, tad $f(2^{k+1} + 1) = 2^{k+1} + 1$. Prasītais pierādīts.

Tā kā $f(x)$ ir stingri augoša funkcija, tad vienādība $f(n) = n$ izpildās visām naturālām *n* vērtībām.

34.31. Kvadrāti var beigties ar 0, 1, 4, 5, 6, 9; mums 0 neder. Skaitlis k^2, dalot ar 4, dod atlikumus 0 vai 1. Tāpēc kvadrāti nevar beigties ar cipariem 11, 55, 66, 99.

Atliek tikai 44. Ievērosim, ka $38^2 = 1444$. Četri četrinieki kvadrāta beigās nevar būt, jo tāds skaitlis, dalot ar 16, dod atlikumu 12, bet kvadrāts šādu atlikumu pēc moduļa 16 nepieņem (pārbaudiet to!).

34.32. Aplūkojamās daļas skaitītāju var pārveidot formā
$-\sin(k+1)y \cdot \sin(k-1)x - \sin(k-1)y \cdot \sin(k+1)x$,
bet saucēju formā $-2\sin x \sin y$.

Tātad apskatāmā izteiksme

$$S \le \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\sin(k-1)x}{\sin x}\right| \cdot \left|\frac{\sin(k+1)y}{\sin y}\right| + \left|\frac{\sin(k-1)y}{\sin y}\right| \cdot \left|\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}\right|\right) <$$

$$\frac{1}{2}((k-1)(k+1) + (k-1)(k+1)) = k^2 - 1$$

(Šeit izmantota nevienādība $|\sin nt| < n|\sin t|$, ko pierāda ar matemātisko indukciju.

34.33. Pieņemsim, ka *A* – koordinātu sistēmas punkts, no kura tiek vilktas pieskares. Pārnesīsim koordinātu sistēmas sākumpunktu uz punktu *A*. Pieņemsim, ka novilkta pieskare polinoma grafikam, un tā pieskaras grafikam punktā $(z_0, P(z_0))$. Pieskares vienādojums ir $t = Q'(z_0) \cdot z$. Tā kā pieskaršanās punkts pieder pieskarei, tad iegūstam vienādību $Q'(z_0) \cdot z_0 = Q(z_0)$. Abās vienādības pusēs ir *n*-tās pakāpes polinomi. Šādam vienādojumam nevar būt vairāk par *n* saknēm. (Atsevišķi jāpierāda, ka dotā vienādība nav identitāte)

34.34. Sanumurēsim regulāra 2*n*-stūra virsotnes pēc kārtas ar numuriem $1, 2, 3, \dots, 2n$. Par nogriežņa svaru sauksim tā galapunktu numuru summu. Novilksim nogriežņus $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_{2n}$, kā arī nogriezni $A_{2n}A_2$; to svari ir attiecīgi $3, 4, 5, \dots, 2n+1, 2n+2$. Starp šiem nogriežņiem nav paralēlu, un katrs nogrieznis, kas savieno divas 2*n*-stūra virsotnes, paralēls vienam no šiem nogriežņiem. Vēl jāatzīmē, ka divi nogriežņi ir paralēli tad un tikai tad, kad to svari ir vienādi vai atšķiras par 2*n*.

Pieņemsim no pretējā, ka izdevies uzzīmēt tādu slēgtu lauztu līniju, kurai nav paralēlu posmu. Tā kā tās posmiem iespējami tikai 2*n* dažādi virzieni, tad tie visi realizējas; tāpēc šīs līnijas visu posmu svaru summai jābūt

$$S = 3 + 4 + 5 + \dots + (2n+1) + (2n+2) + k \cdot 2n = 2n\left(k + n + \tfrac{5}{2}\right).$$

No otras puses, summā S katras virsotnes numurs ieskaitīts tieši divas reizes; tāpēc

$S = 2(1+2+3+\cdots+2n) = 2n(2n+1)$.

No šejienes iegūstam $2n\left(k+n+\frac{5}{2}\right) = 2n(2n+1) \Rightarrow k+n+\frac{5}{2} = 2n+1 \Rightarrow n-k = \frac{3}{2}$.

Tā ir pretruna, jo *n* un *k* ir veseli skaitļi.

34.35. Pierāda, ka šim trijstūrim izpildās īpašība $AC \parallel A_1C_1$ (un četras analoģiskas paralelitātes). Tālāk, veicot aprēķinus, iegūstam, ka meklētā piecstūra laukums ir $\sqrt{5}$.