Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

# LATVIJAS REPUBLIKAS 35. OLIMPIĀDE

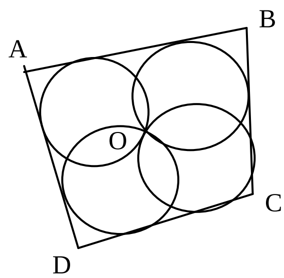
## UZDEVUMI

## 8. klase

**35.1** Atrisināt vienādojumu
$\sqrt[11]{x+\sqrt{2x-1}}=2.$

Atbildi centieties pierakstīt parastajā decimālajā pierakstā, neizmantojot pakāpes, saknes zīmes utt.

**35.2.** Četras riņķa līnijas ar vienādiem rādiusiem krustojas vienā punktā *O*. Četrstūra *ABCD* malas katra pieskaras divām riņķa līnijām (35.1.zīm.). Pierādīt, ka ap četrstūri *ABCD* var apvilkt riņķa līniju.

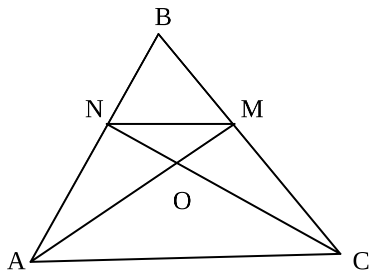



35.1. zīm.

**35.3.** Trijstūrī *ABC* novilkti nogriežņi *AM* un *CN*, kas krustojas punktā *O*. Dots, ka trijstūra *AON* laukums ir $S_1$, trijstūra *MOC* laukums ir $S_2$, bet trijstūra *AOC* laukums ir $S_3$ (35.2.zīm.).

1. Pierādīt, ka trijstūra *MON* laukums ir $\frac{S_1 \cdot S_2}{S_3}$ .

2. Aprēķināt trijstūra *ABC* laukumu.




35.2.zīm.

**35.4.** Doti 1985 dažādi akmeņi, kuru svars ir 1 kg, 2 kg, 3 kg, … , 1984 kg, 1985 kg. Vai tos var sadalīt 5 kaudzītēs tā, lai akmeņu skaits visās kaudzītēs būtu vienāds un visu kaudžu svars arī būtu vienāds?

**35.5.** Uz tāfeles uzrakstīti 12 skaitļi

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{11} \quad \frac{1}{12} \;.$$

a) Pierādīt, ka nevar katram skaitlim priekšā pierakstīt "+" vai "-" zīmi tā, lai iegūtās summas vērtība būtu 0.

b) Kādu mazāko daudzumu skaitļu jānodzēš, lai, atlikušajiem priekšā pierakstot "+" vai "-" zīmes, varētu iegūt summu 0?

## 9. klase

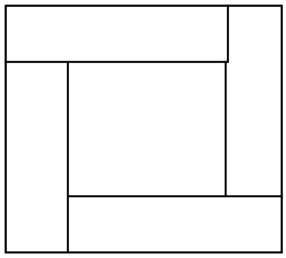
**35.6.** Izliektā četrstūrī *ABCD* malas *BC* un *AD* ir paralēlas. Ir zināms, ka uz četrstūra malām un tā diagonālēm var izvēlēties virzienus (pārvēršot malas un diagonāles par vektoriem) tā, ka iegūto 6 vektoru summa ir $\vec{0}$. Kāda var būt malu *BC* un *AD* garumu attiecība?

**35.7.** Funkcija $f(x)$ definēta visām reālām *x* vērtībām. Zināms, ka $f(1) = 0$ un visiem *x* un *y* ir spēkā vienādība

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| .$$

Noteikt funkciju $f(x)$. (Mēģiniet atrast visas iespējas un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.)

**35.8.** Kvadrāts sagriezts 5 taisnstūros, kā parādīts 35.3. zīmējumā. Zināms, ka to četru taisnstūru laukumi, kas piekļaujas kvadrāta malām, ir vienādi. Pierādīt, ka iekšējais taisnstūris ir kvadrāts.



35.3. zīm.

**35.9.** Uz tāfeles uzrakstīja visus naturālos skaitļus no 1 līdz $n$, katru vienu reizi. Pēc tam vienu nodzēsa. Atlikušo skaitļu vidējais aritmētiskais ir $\frac{602}{17}$. Kādu skaitli nodzēsa?

**35.10.** Ap galdu sēž matemātiķi $Z$, $A$ un $B$. Matemātiķis $Z$ saka: "Es esmu iedomājies divus naturālus skaitļus (varbūt vienādus). To summa ir" (iečukst ausī matemātiķim $A$), "bet to kvadrātu summa ir" (iečukst ausī matemātiķim $B$). Pēc tam starp $B$ un $A$ notiek šāda saruna.

$B$: "Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus."
$A$: "Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus."
$B$: "Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus."
$A$: "Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus."
$B$: "Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus."
$A$: "Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus."
$B$: "Tagad es zinu iedomātos skaitļus."

Kādus skaitļus $Z$ iedomājies? (Visi sarunā izdarītie apgalvojumi ir patiesi.)

## 10. klase

**35.11.** Atrisināt vienādojumu

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$$

**35.12.** Kāds mazākais skaits kuba šķautņu jāpārgriež, lai pa atlikušajām šķautnēm ne no vienas virsotnes nevarētu aiziet uz pretējo virsotni?

**35.13.** Istabā atrodas 10 cilvēki. Vai var gadīties, ka viņiem ir šāds paziņu skaits šajā istabā:

a) 9; 9; 9; 8; 8; 8; 7; 6; 4; 3;

b) 9; 9; 9; 8; 8; 8; 7; 6; 4; 4?

**35.14.** Dota trijstūra piramīda un punkts *M* tās iekšpusē. Pierādīt, ka uz piramīdas šķautnēm var izvēlēties 4 punktus tā, lai tie būtu tāda izliekta četrstūra virsotnes, kura diagonāles krustojas punktā *M*. Cik dažādos veidos var izvēlēties šos punktus?

**35.15.** Funkcija $f(x)$ definēta veselām pozitīvām *x* vērtībām, un tās vērtības arī ir veseli pozitīvi skaitļi. Zināms, ka vienlaikus ir spēkā šādas trīs īpašības:

1) $f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(n) < f(n+1) < \cdots$, t.i., funkcija $f(x)$ ir stingri augoša;

2) $f(985) = 1985$;

3) ja veseliem pozitīviem skaitļiem *m* un *k* lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad $f(m \cdot k) = f(m) \cdot f(k)$.

Aprēķināt

a) $f(1000)$;

b) $f(3599)$;

c) $f(n)$ patvaļīgam pozitīvam *n*.

## 11. klase

**35.16.** Pierādīt, ka $\log_{10} 11$ ir iracionāls skaitlis.

**35.17.** a) Pierādīt, ka taisnleņķa trijstūrī ar leņķiem α, β un γ, ievilktās riņķa līnijas rādiusu *r* un apvilktās riņķa līnijas rādiusu *R* , pastāv sakarība

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}.$$

b) Vai taisnība, ka šāda sakarība pastāv patvaļīgā trijstūrī?

**35.18.** a) Atrast kaut vai vienu daudzskaldni *M* ar šādu īpašību: lai kuru *M* skaldni izvēlētos, visiem *M* šķēlumiem ar plaknēm, kas paralēlas šai skaldnei, ir viens un tas pats perimetrs.

b) Atrast divas šādus daudzskaldņus ar dažādu skaldņu skaitu.

**35.19.** Doti 5 reāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus un *x* un *y* tā, lai būtu spēkā nevienādība

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1.$$

**35.20.** Dots, ka *A*, *B* un *C* ir naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100. Pierādīt, ka var atrast tādus veselus skaitļus *a*, *b* un *c*, kas visi reizē nav 0, ka $aA + bB + cC = 0$. Turklāt jābūt spēkā nevienādībām $|a| \le 18$, $|b| \le 18$, $|c| \le 18$.

# PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

## 8. un 9. klases

**35.21.** Dots, ka *a* un *b* ir racionāli skaitļi, pie tam $a \ne 0$. Pierādīt, ka var atrast tādus četrus racionālus skaitļus (starp tiem var būt arī vienādi), kuru summa ir *a*, bet reizinājums ir *b*.

**35.22.** Cik kvadrātos var sagriezt kvadrātu?

**35.23.** Pierādīt, ka katru naturālu skaitli, kas lielāks par 17, var izsacīt kā triju tādu naturālu skaitļu summu, no kuriem katriem diviem lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

**35.24.** Izliektā piecstūrī *ABCDE* apzīmējam ar $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$ attiecīgi diagonāļu *EB*, *AC*, *BD*, *CE*, *DA* viduspunktus. Dots, ka taisnes $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ krustojas punktā *O*. Pierādīt, ka arī taisne $EE_1$ iet caur punktu *O*.

**35.25.** Funkcijas $f(x)$ argumenta *x* vērtības var būt naturāli skaitļi 1; 2; 3; … , bet $f(x)$ vērtības ir nenegatīvi veseli skaitļi. Dots, ka $f(2) = 0$, $f(3) > 0$, $f(9999) = 3333$. Bez tam dots, ka katriem diviem naturāliem skaitļiem *m* un *n* (varbūt *m* = *n*) izteiksmes $f(m+n) - f(n) - f(m)$ vērtība ir 0 vai 1. Aprēķināt $f(1985)$.

## 10. klase

**35.26.** Regulārs trijstūris *S* pilnīgi pārklāts ar pieciem mazākiem vienādiem regulāriem trijstūriem (mazie trijstūri varbūt pārsedz arī kādu plaknes daļu ārpus *S*). Pierādīt, ka *S* var pārklāt ar četriem tāda paša izmēra regulāriem trijstūriem.

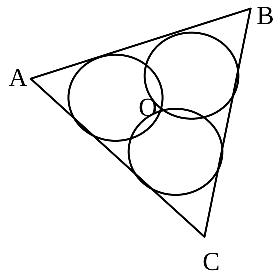
**35.27.** Skaitļu virkni $(x_n)$ veido šādi:

a) $x_1 = 1$;

b) ja $k \geq 1$, tad $x_{k+1}$ ir skaitļa $1985 \cdot x_k$ ciparu summu.

Pierādīt, ka, sākot no kādas vietas, virkne $(x_n)$ kļūst periodiska.

**35.28.** Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas viena punktā *O*. Trijstūra *ABC* malas katra pieskaras divām riņķa līnijām (35.4. zīm.). Pierādīt, ka trijstūrī *ABC* ievilktās riņķa līnijas centrs, trijstūrim *ABC* apvilktās riņķa līnijas centrs un punkts *O* atrodas uz vienas taisnes.




35.4. zīm.

**35.29.** Trīs draugi nopirkuši torti. Katram no viņiem ir savs ieskats par dažādu tortes daļu vērtību; domas ir tik dažādas, ka izsacīt atsevišķu daļu vērtību ar vienotu kritēriju, piemēram, naudā, nav iespējams.

Kā viņiem sadalīt torti, lai katrs uzskatītu, ka neviens cits nav saņēmis vērtīgāku daļu nekā viņš?

**35.30.** Dots, ka *p*, *q* un *r* ir pozitīvi skaitļi un $p + q + r = 1$. Pierādīt nevienādību $(1-p^5)^5 + (1-q^5)^5 + (1-r^5)^5 > 2$.

## 11. klase

**35.31.** Kā piešķirt skaitļiem $x_1$; $x_2$; $x_3$; …; $x_{1985}$ vērtības 1; 2; 3; …; 1985 (katram skaitlim – citu vērtību) tā, lai izteiksmes $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{1984}x_{1985} + x_{1985}x_1$ vērtība būtu lielākā iespējamā?

**35.32.** Pierādīt, ka eksistē 1985 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, no kuriem neviens nav naturāla skaitļa pakāpe, augstāka par pirmo.

**35.33.** Ziedu pilsētā ir 25 dārziņi; tie ir kvadrāti ar izmēriem $1\times1$ un kopā veido lielu kvadrātu ar izmēriem $5\times5$. Dārziņi jāpiešķir 25 rūķīšiem. Katrs no viņiem sastrīdējušies ar ne vairāk kā trim. Pierādīt, ka dārziņus var piešķirt tā, lai nekādiem diviem rūķīšiem, kas sastrīdējušies, nebūtu piešķirti dārziņi ar kopēju malu.

**35.34.** Sfērā, kuras rādiuss ir 1, ievilkta trijstūra piramīda; sfēras centrs atrodas piramīdas iekšpusē. Pierādīt, ka piramīdas šķautņu garumu summa ir lielāka par 6.

**35.35.** Skaitļu virkni $(x_n)$ veido pēc likuma $x_1=1;\quad x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$. Pierādīt, ka

a) šī virkne ir neierobežota;

b) $x_{1000}>44$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$.