Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 37. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

37.1. Dots, ka a un b – kaut kādi skaitļi. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem

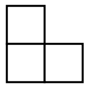
$$x^2+2ax+b=0;$$
$$ax^2+2bx+1=0;$$
$$bx^2+2x+a=0$$

ir atrisinājums.

37.2. Trapecē $ABCD$ mala AD ir pamats. Dots, ka AB = BC, AC = CD, AD = $BC+CD$. Aprēķināt trapeces leņķus.

37.3. 1. Pierādīt, ka kvadrātu, kura izmēri ir 6×6 rūtiņas var sagriezt 37.1. zīmējumā attēlotajos "stūrīšos" tā lai neviens mazāka izmēra taisnstūris, kas ietilpst šajā kvadrātā , nebūtu sagriezts "stūrīšos".

2. Atrisināt tādu pašu uzdevumu kvadrātam, kas sastāv no 24×24 rūtiņām.



37.1.zīm.

37.4. Katrs plaknes punkts var būt nokrāsots baltā vai melna krāsā. Punktu krāsas var mainīt tikai ar ierīcēm T_n (n – naturāls skaitlis). Ierīce T_n ir regulāra trijstūra formas plāksnīte ar malas garumu n, un tā darbojas šādi: ja ar ierīci T_n pieskaras plaknei, tad visi pieskaršanās punkti maina savu krāsu uz pretējo (ierīce T_n var pieskarties plaknei ar virsotni, ar malu vai ar visu trijstūri).

Izmantojot ierīces T_3 un T_5, uzzīmēt baltā plaknē melnu regulāru trijstūri ar malas garumu 11 (melnām jābūt gan trijstūra virsotnēm, gan malām, gan iekšpusei).

37.5. Kādiem naturāliem n skaitlis $1\underbrace{44444\ldots44}_{n}$ ir naturāla skaitļa kvadrāts?

9. klase

37.6. Dots, ka *ABCDE* ir izliekts piecstūris, bet A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 -- atbilstoši tā malu *CD, DE, EA, AB, BC* viduspunkti. Pierādīt, ka $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{EE_1} = 0$.

37.7. a) Dota bezgalīga skaitļu virkne $a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots$. Zināms, ka $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_{n+1} - a_n) = 0$. Pierādīt, ka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Koordinātu plaknē *Oxy* attēlot apgabalu, ko aizpilda tie punkti (*x*; *y*), kuru koordinātas vienlaikus apmierina trīs nevienādības

$$0 \le x \le \pi$$
$$0 \le y \le \pi$$
$$\sin x \ge \sin y\,.$$

37.8. Izliektā sešstūrī *ABCDEF* dots, ka $AB \parallel CF$, $CD \parallel BE$, $EF \parallel AD$. Pierādīt, ka trijstūru *ACE* un *BDF* laukumi ir vienādi.

37.9. Pierādīt identitāti

$$||||\,x\,|-8\,|-4\,|-2\,|-1\,| = |\ldots||||\,x\,|\underbrace{-1\,|-1\,|-\ldots|-1\,|}_{15\text{ vieninieku}}.$$

37.10. Šaha galdiņš sastāv no 8×8 laucițiem. Tā kreisajā apakšējā stūrī kvadrāta 3×3 formā novietotas 9 figūriņas. Figūriņa var pārlēkt uz brīvu lauciņu pāri blakus stāvošai figūriņai, t.i., atspoguļoties simetriski attiecībā pret tās centru (lēkt var pa horizontāli, pa diagonāli un pa vertikāli). Ar vairākiem gājieniem visas figūriņas jānovieto citā stūrī, atkal izkārtojot tās kvadrāta 3×3 formā. Vai figūriņas var novietot

a) kreisajā augšējā stūrī;

b) labajā augšējā stūrī?

10. klase

37.11. Pierādīt identitāti

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x\,.$$

37.12. Dotas četras monētas: 1, 2, 3 un 5 kap. Zināms, ka tieši viena no tām ir viltota, t.i., pēc svara atšķiras no īstas monētas. Vai ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var atrast viltoto monētu, ja zināms, ka īsto monētu svars ir atbilstoši 1g, 2g, 3g un 5g?

37.13. Izliektā četrstūrī *ABCD* pastāv vienādība *AB* = *CD*; turklāt diagonāļu *AC* un *BD* viduspunkti *M* un *N* nesakrīt viens ar otru. Pierādīt, ka taisne *MN* veido vienādus leņķus ar malām *CD* un *AB*.

37.14. Dots, ka $a > 0$, $a + b \geq 0$, $a + b + c \geq 0$, $a + b + c + d \geq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nav sakņu, kas lielākas par 1.

37.15. Klases vakarā neviens zēns nedejoja ar visām meitenēm, bet katra meitene dejoja ar vismaz vienu zēnu. Pierādīt, ka var atrast divus zēnus Z_1 un Z_2 un divas meitenes M_1 un M_2 tā, ka Z_1 dejoja ar M_1, Z_2 dejoja ar M_2, Z_1 nedejoja ar M_2, Z_2 nedejoja ar M_1.

11. klase

37.16. Dots, ka α un β -- šauri leņķi. Pierādīt nevienādību

$$1 + \cos(\alpha - \beta) \geq \cos\alpha + \cos\beta \ .$$

37.17. Riņķa līnija neiet ne caur vienu izliekta 1987-stūra virsotni, un tai ar katru šī 1987-stūra malu ir tieši viens kopīgs punkts. Pierādīt, ka riņķa līnija pieskaras vismaz vienai šī 1987-stūra malai.

37.18. 1987 vieninieki uzrakstīti rindā. Pirmos divus skaitļus nosvītro un rindas galā pieraksta to summu. Pēc tam atkal nosvītro pirmos divus vēl nenosvītrotos skaitļus un rindas galā uzraksta to summu, utt. Tā turpina, kamēr paliek viens nenosvītrots skaitlis.

1. Cik skaitļu šajā brīdī uzrakstīts?
2. Kāds ir vienīgais nenosvītrotais skaitlis?
3. Kāda ir visu šajā brīdī uzrakstīto skaitļu summa?

37.19. Vai, šķeļot ar plakni daudzskaldni, kuram ir 6 virsotnes, var šķēlumā iegūt astoņstūri?

37.20. Pēc klases vakara skolēni steidzās mājās un steigā sajauca cepures. Savu kļūdu visi pamanīja tikai otrā rītā. Pierādīt, ka divās dienās visi var atgūt savas cepures, ja katrā dienā katrs skolēns var augstākais vienu reizi samainīties cepurēm ar vienu savu biedru.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

37.21. Caur divu riņķa līniju krustpunktu *M* novilktas divas taisnes, kas veido vienādus leņķus ar šo riņķa līniju kopējo hordu. Viena no tām krusto riņķa līnijas vēl punktos *A* un *B*, bet otra – vēl punktos *C* un *D*. Pierādīt, ka $AB = CD$.

37.22. Skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir pozitīvi. Dots, ka

$x_1 y_1 < x_2 y_2 < \cdots < x_n y_n$;

$x_1 \geq y_1$;

$x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$;

$x_1 + x_2 + x_3 \geq y_1 + y_2 + y_3$;

$\ldots$

$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \geq y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n$

Pierādīt, ka

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n}.$$

37.23. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Sākumā visas rūtiņas ir baltas. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties vienu rindu un vienu kolonnu un mainīt krāsu uz pretējo (no baltas uz melnu vai no melnas uz baltu) visās 15 rūtiņās, kas atrodas izraudzītajā rindā un kolonnā. Vai, daudzkārt izpildot šādus gājienus, var panākt jebkuru rūtiņu krāsojumu baltā vai melnā krāsā?

37.24. Trijstūra laukums ir 100 cm^2, bet perimetrs 100 cm. Novilktas trīs taisnes paralēli tā malām attālumā 1 cm no tām; visas taisnes krusto trijstūri. Šīs taisnes sadala trijstūri 7 daļās, no kurām trīs ir paralelogrami. Pierādīt, ka paralelogramu laukumu summu ir mazāka par 25 cm^2.

37.25. Kaudzē 1 987 000 000 akmeņu. Ar vienu gājienu no kaudzes var paņemt p^k akmeņus, kur *p* – pirmskaitlis, bet $k = 0; 1; 2; 3; \ldots$ (piemēram, var ņemt 25, 1, 5, 8 utt.). Divi spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus. Uzvar tas, kas paņem pēdējo akmeni.

Kurš uzvar, pareizi spēlējot, -- tas, kurš izdara pirmo gājienu, vai tas, kurš izdara otro gājienu?

10. klase

37.26. Uz skaitļu ass atrodas kopa M; to var pārklāt ar pieciem vienības nogriežņiem. Apzīmēsim ar M_1 to nogriežņu viduspunktu kopu, kuru abi gali pieder kopai M. Pierādīt, ka M_1 var pārklāt ar 15 vienības nogriežņiem. Vai M_1 noteikti var pārklāt ar 14 vienības nogriežņiem?

37.27. Izliekta piecstūra $A_1A_2A_3A_4A_5$ visi leņķi ir vienādi. Piecstaru zvaigznes $A_1A_3A_5A_2A_4$ virsotņu leņķi arī visi ir vienādi. Pierādīt, ka $A_1A_2A_3A_4A_5$ ir regulārs piecstūris.

37.28. Pierādīt, ka, lai kāda arī būtu konstante A, vienādojumam $x! - y^2 = A$ ir tikai galīgs skaits (varbūt neviena) atrisinājumu naturālos skaitļos.

37.29. Dots, ka skaitļu virknē (x_n) pastāv sakarības $0 < x_1 < 1$; $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, n = 1, 2, 3, … . Pierādīt, ka $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$.

37.30. A un B ir regulāra n-stūra blakusvirsotnes $(n \geq 5)$, n-stūra centrs ir O. Trijstūris XYZ, kas ir vienāds ar trijstūri OAB, sākumā sakrīt ar to, pēc tam kustas n-stūra plaknē tā, ka Y un Z paliek uz n-stūra kontūra, bet X – tā iekšpusē. Kādu figūru "uzzīmēs" punkts X, kad Y un Z veiks katrs pilnu apgriezienu pa n-stūra kontūru?

11. klase

37.31. Regulāra trijstūra malu iekšpuses ir spoguļi. Trijstūrī palaida gaismas staru. Daudzkārt atstarodamies no malām, tas caur kādu punktu O gāja 7 reizes. Pierādīt, ka stars vēlreiz ies caur punktu O.

37.32. Telpiskas lauztas līnijas garumu apzīmēsim ar l, bet tās projekciju garumus koordinātu plaknē – ar a, b un c.

a) Atrast attiecības $\dfrac{a+b+c}{l}$ maksimālo vērtību.

b) Vai eksistē slēgta lauzta līnija, kurai šis maksimums tiek sasniegts?

37.33. Dots, ka

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{1984\cdot 1985\cdot 1986}=\frac{m}{n};$$

kur *m* un *n* – naturāli skaitļi. Pierādīt, ka *m* dalās ar 1987.

37.34. *M* ir koordinātu plaknes punktu galīga kopa; visiem *M* punktiem abas koordinātas ir veseli skaitļi. Vai vienmēr var nokrāsot daļu kopas *M* punktu baltā, bet pārējos – sarkanā krāsā tā, lai uz katras taisnes, kas paralēla vienai no koordinātu asīm, balto un sarkano punktu skaits atšķirtos ne vairāk kā par 1?

37.35. Katra regulāra piecstūra virsotnē ierakstīts vesels skaitlis tā, ka visu ierakstīto skaitļu summa ir pozitīva. Ja trijās pēc kārtas ņemtās virsotnēs ierakstīti skaitļi ir x, y un z, turklāt $y < 0$, tad šos skaitļus atļauts aizstāt attiecīgi ar $x + y$, $-y$, $y + z$. Šādas operācijas turpina, kamēr vēl ir kaut viens negatīvs skaitlis. Vai var gadīties, ka aprakstītais process nekad nebeidzas?