Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

# LATVIJAS REPUBLIKAS 40. OLIMPIĀDE

# ATRISINĀJUMI

**40.1.** Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, vienlaicīgi jāpastāv nevienādībām

$$a^2 \geq 4bc,\ \ b^2 \geq ac,\ \ c^2 \geq 4ab\,.$$

Tā kā nevienādību abās pusēs atrodas pozitīvi skaitļi, tad varam tās sareizināt. Iegūstam

$$a^2b^2c^2 \geq 64a^2b^2c^2 \quad \Leftrightarrow \quad 63a^2b^2c^2 \leq 0\,,$$

kas pozitīviem skaitļiem nav iespējams.

**40.2.** a) Jā. Piemēram, ja dotie skaitļi ir 1, 2, 3, … , 10, var izvēlēties četrus skaitļus 1, 2, 4, 8, kas veido ģeometrisku progresiju.

b) Nē. Sakārtosim skaitļus augošā kārtībā $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ ar diferenci *d*. Pieņemsim, ka no šiem skaitļiem izvēlēti 5 skaitļi $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$, kas veido ģeometrisku progresiju. Tad, ievērojot, ka $(b_i)$ ir augoša ģeometriska progresija, iegūstam

$$b_5 - b_1 = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + (b_5 - b_4) \geq$$
$$d + 2d + 3d + 4d = 10d > 9d = a_{10} - a_1\,,$$

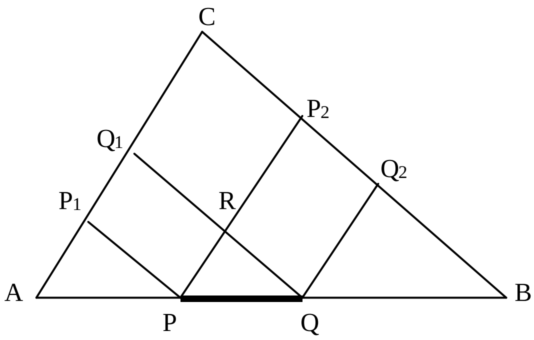
bet tas nav iespējams.

**40.3.** Apzīmēsim monētas ar *A*, *B*, *C*, *D*. Izdarīsim 3 svēršanas:

$A+B$ ar $C+D$, $A+C$ ar $B+D$, $A+D$ ar $B+C$.

Tā kā $4+3 > 2+1$, $4+2 > 3+1$, bet $4+1 = 3+2$, tad tieši vienā gadījumā svari būs līdzsvarā. Tā monēta, kas ietilpst abos smagākajos pāros ir 4 g. monēta; tā monēta, kas ietilpst abos vieglākajos pāros ir 1 g. monēta. Ar pēdējo svēršanu salīdzinām abas atlikušās 2 un 3 g. monētas.

**40.4.** Figūras *F* laukumu apzīmēsim ar $[F]$.



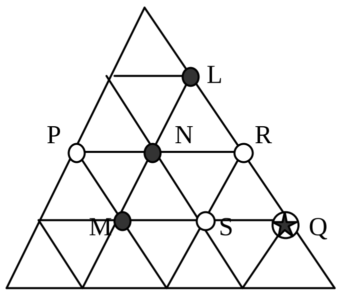

40.4. zīm.

Ievērosim, ka $PP_1Q_1R$ un $QQ_2P_2R$ ir paralelogrami. Tāpēc

$$[PP_1Q_1Q]+[PP_2Q_2Q]=2[PQR]+[PP_1Q_1R]+[RP_2Q_2Q]=$$
$$2([PQR]+[PQ_1R]+[RP_2Q])=2([PQR]+[PCR]+[RCQ])=2[PQC],$$

kas nav atkarīgs no $PQ$ stāvokļa uz malas $AB$.

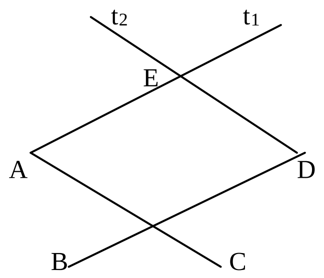
**40.5.** Pieņemsim pretējo, ka tādas virsotnes izvēlēties nevar. Apskatīsim trīs virsotnes $M$, $N$, $L$. Divas no tām ir nokrāsotas vienā krāsā (teiksim $M$ un $N$ ir melnas).




40.4. zīm.

Pieņemsim, ka tās ir $M$ un $N$. Tad no trijstūriem $MNP$ un $MNS$ seko, ka virsotnes $P$ un $S$ ir baltas. No trijstūra $PSL$ seko, ka virsotne $L$ ir melna. No trijstūra $LNR$ seko, ka virsotne $R$ ir balta. Tagad, ja virsotne $Q$ ir melna, veidojas trijstūris $MLQ$ ar melnām virsotnēm; ja virsotne $Q$ ir balta, veidojas trijstūris $SRQ$ ar baltām virsotnēm. Iegūta pretruna.

**40.6.** Regulārā piecstūrī katra mala paralēla diagonālei, kurai ar to nav kopīgu punktu. Šī īpašība pie paralēlprojekcijas saglabājas. Tāpēc konstrukcijas gaita varētu būt šāda (skat 40.5. zīm.). Caur *A* velk taisni $t_1 \parallel BD$, caur *D* velk taisni $t_2 \parallel AC$. $t_1$ un $t_2$ krustpunkts ir meklējamais punkts *E*.

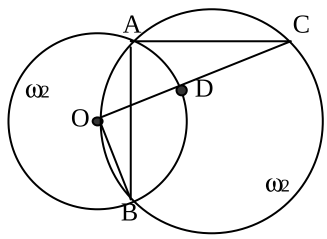



40.5. zīm.

**40.7.** Var būt, ka pozitīvu skaitļu nav ($x = \pi$); ka to ir viens ($x = 0$); divi ($x = \frac{5}{4}\pi$); četri ($x = \frac{\pi}{4}$). Pierādīsim, ka tieši trīs skaitļi nevar būt pozitīvi.

Ja $\sin x = 0$ vai $\cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = 0$ vai $\operatorname{ctg} x = 0$, un trīs skaitļi nevar būt pozitīvi. Ja $\sin x \neq 0$ un $\cos x \neq 0$, tad $\operatorname{tg} x$ un $\operatorname{ctg} x$ zīmes ir vienādas; tātad tiem jābūt pozitīviem skaitļiem. Bet tad arī skaitļu $\sin x$ un $\cos x$ zīmes ir vienādas, tātad kopā nesanāk 3 pozitīvi skaitļi.

**40.8.** Skat. 40.6. zīmējumu.




40.6. zīm.

Tā kā $AO = OB$, tad $\angle ACO = \angle BCO$ pēc ievilkto leņķu īpašības. Tāpēc *CO* ir $\angle ACB$ bisektrise.

No ievilkto leņķu īpašības seko, ka $\angle BAC = \angle COB = \angle DOB$. Tā kā $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle DOB$ (ievilkts leņķis un centra leņķis, kas balstās uz vienu loku), tad

$\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC$ , un $AD$ ir $\angle BAC$ bisektrise. Tātad $D$ pieder divām trijstūra $ABC$ bisektrisēm, t.i., sakrīt ar bisektrišu krustpunktu.

**40.9.** Skaitlis 1 ir savstarpējs pirmskaitlis ar visiem naturāliem skaitļiem. Aplūkosim naturālus skaitļus no 2 līdz 360. Ja tāds $n$ nav pirmskaitlis, tad tam jādalās ar kādu pirmskaitli, kas nepārsniedz $\sqrt{n} \le \sqrt{360} < \sqrt{361} = 19$.

Par 19 mazāki ir tikai 7 pirmskaitļi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Tātad, ja izvēlēsimies (neskaitot 1) vairāk nekā 7 šādus skaitļus, tad vismaz diviem no tiem būs kopīgs pirmreizinātājs. Tātad vairāk par 8 skaitļiem izvēlēties nevar.

Piemērs ar 8 skaitļiem ir šāds:

$$1, 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2.$$

**40.10.** Ievietojot $a = n + 1990, b = 1$, iegūstam $F(n+1991) = F(n)$. No šejienes, atkārtoti pielietojot šo formulu, iegūstam $F(n) = F(n + i \cdot 1991)$.

Ņemot $a = n, b = 1991$, iegūstam

$F(n+1991) = F(1991n - 1990) = F(1 + (n-1)1991) = F(1)$ .

No iepriekš pierādītā $F(n) = F(n+1991) = F(1)$, t.i., $F(x)$ ir konstanta funkcija. Ievietojot sākotnējā vienādībā pārbaudām, ka visas konstantās funkcijas apmierina uzdevuma nosacījumus.

**40.11.** Ņemsim polinomu ar augstāko pakāpi (vai jebkuru no tādiem). Skaidrs, ka tas nav neviena cita polinoma atvasinājums, jo atvasinājuma pakāpe ir zemāka par polinoma pakāpi.

**40.12.** Izmantojot formulas, doto izteiksmi pārveido formā $\sqrt{2}\sin(45° + x)$ . Protams, ka tās lielākā vērtība ir $\sqrt{2}$ .

**40.13.** Pierādīsim, ka katrs no šiem trijstūriem satur riņķa centru. Tad riņķa centrs būs kopīgs abiem trijstūriem.

Aplūkosim vienu no šiem trijstūriem $ABC$ un pieņemsim, ka tas nesatur riņķa centru. Novilksim visas taisnes, kas satur dotā trijstūra malas. Viena no tām (teiksim $AB$) atdala trijstūri $ABC$ no riņķa centra $O$ . Viegli pierādīt, ka tā pamats $AB$ mazāks par riņķa diametru , bet augstums $CH$ mazāks par riņķa rādiusu . Tātad tā laukums ir mazāks par 1 (atcerēsimies, ka riņķa rādiuss ir 1). Iegūta pretruna, kas pierāda, ka abi trijstūri satur riņķa centru.

**40.14.** Izveidosim vispirms patvaļīgu kubu no 8 dotajiem kubiņiem. Pieņemsim, ka uz tā virsmas ir *b* balti un *m* melni kvadrātiņi ar malas garumu 1.

Tad $m+b=24$. Apskatām starpību $m-b=d$. Ja $d=0$, tad viss pierādīts. Atzīmēsim, ka $d$ ir pāra skaitlis un pieņemsim, ka $d>0$. Pagriezīsim vienu no mazajiem kubiņiem par $90°$ ap asi, kas savieno kubiņa pretējo skaldņu centrus. Tad viena redzamā kubiņa skaldne kļūs neredzama, bet viena redzamā kubiņa skaldne kļūs neredzama. Ja šīs skaldnes ir vienādā krāsā, tad *d* vērtība nemainās, ja pretējās krāsās, tad *d* vērtība mainās par 2.

Pagriežot katru kubiņu ap 3 savstarpēji perpendikulārām asīm, mēs varam panākt, ka tās skaldnes, kas sākumā bija neredzamas, kļuva redzamas un otrādi. Skaidrs, ka tādā gadījumā *d* vērtība izmainījās uz pretējo. Tā kā *d* pieņem tikai pāra vērtības un katrā soli var mainīties tikai par 2, tad bija moments, kad $d=0$. Šādu momentu mums arī bija jāatrod.

**40.15.** Pēc moduļa 10 noskaidrojam, ka *n* pēdējais cipars ir 4. Pēc moduļa 3 noskaidrojam, ka *n* dalās ar 3.

Tālāk pārbaudām, ka dotā summa dalās ar 64. Izmantojot nevienādības pārbaudām, ka $133<n<204$. Šajā intervālā tikai skaitlis $n=144$ apmierina dotās dalāmības prasības.

**40.16.** Logaritmējot pie bāzes 2, iegūstam

$x\cdot\log_2 x=1$.

Ja $x<1$, tad kreisā puse ir negatīva.

Ja $x>1$, kreisajā pusē ir auguša funkcija; tātad atrisinājumu nav vairāk par vienu.

Tā kā pie $x=1$ $x\cdot\log_2 x=0<1$, bet pie $x=2$ $x\cdot\log_2 x=2>1$, tad no funkcijas nepārtrauktības seko, ka viena sakne eksistē.

**40.17.** Apzīmēsim patvaļīga nogriežņa *a* projekcijas uz koordinātu asīm ar $a_x, a_y, a_z$, bet uz koordinātu plaknēm $O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$ attiecīgi ar $a_1, a_2, a_3$. Tad

$a^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$,

$a_1^2=a_x^2+a_y^2$,

$a_2^2=a_x^2+a_z^2$,

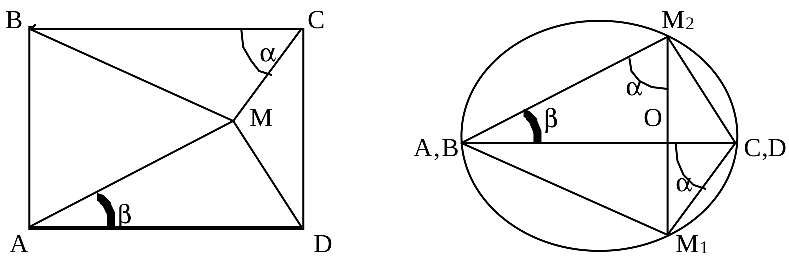
$a_3^2=a_y^2+a_z^2$. Tāpēc

$$a^2=\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right).$$

Apzīmējam trijstūra malas ar $a, b, c$. Pēc dotā $a_i^2<b_i^2+c_1^2$ $(i=1, 2, 3)$. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$a^2 < b^2 + c^2$ ; līdzīgi pierāda, ka $b^2 < a^2 + c^2$ un $c^2 < a^2 + b^2$ . Tātad dotais trijstūris noteikti ir šaurleņķa.

**40.18.** Saliksim kopā ar malām *BC* un *AD* trijstūrus *BMC* un *AMD*. Iegūsim četrstūri, kam pretējo leņķu summa ir $180°$ ( tātad ap to var apvilkt riņķa līniju), bet diagonāles perpendikulāras (skat. 40.7. zīm.).




40.7. zīm.

Tā kā $\angle AM_2M_1 = \angle ACM_1 = \alpha$ , tad
$\angle BCM + \angle DAM = \alpha + \beta = 180° - \angle AOM_2 = 90°$ . Prasītais aprēķināts.

**40.19.** Sauksim trijstūri par homogēnu, ja tā visas virsotnes ir vienā un tai pašā krāsā. Skaidrs, ka homogēni trijstūri eksistē.

Apskatīsim homogēnu trijstūri ar <u>vismazāko</u> laukumu. Pagaidām apzīmēsim tā virsotnes ar *M*, *N* un *K*. Varam uzskatīt, ka tās visas nokrāsotas sarkanas. Pieņemsim, ka uz katras trijstūra *MNK* malas atrodas zils punkts. Tad šie zilie punkti veido trijstūri ar mazāku laukumu, bet tas ir pretrunā ar trijstūra *MNK* izvēli. Tātad uz kādas trijstūra *MNK* malas nav zilu punktu. Šīs malas virsotnes apzīmēsim ar *B* un *C*, bet trešo virsotni ar *A*. Prasītais trijstūris iegūts.

**40.20.** Vienādojumu pārveidojam formā
$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1) = y^2$ .
Redzam, ka $(x+1)(x^2+x+1)$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Skaitļi $x+1$ un $x^2+x+1$ ir savstarpēji pirmskaitļi. Tiešām
$(x+1,\ x^2+x+1) = (x+1,\ x^2+x+1-x\cdot(x+1)) = (x+1, 1) = 1$ .
Tā kā to reizinājums ir kvadrāts, tad katram no tiem jābūt kvadrātiem. Taču $x^2+x+1$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts, jo tas atrodas starp diviem sekojošiem kvadrātiem: $x^2 < x^2+x+1 < (x+1)^2$ .

**40.21.** Katrai kopai $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ piekārtosim tai simetrisku kopu $\widehat{A}=\{1991-x_1,1991-x_2,\ldots,1991-x_n\}$. Šī simetrija ir viennozīmīgs visu apakškopu kopas attēlojums uz visu apakškopu kopu. Atzīmēsim, ka pirmās kopas minimālais elements pārvēršas par otrās kopas maksimālo elementu un pirmās kopas maksimālais elements pārvēršas par otrās kopas minimālo elementu. No šejienes seko vienādība $S(\widehat{A})=2\cdot1991-S(A)$ ( $S(A)$ ir kopas $A$ lielākā un mazākā elementu summa).

Apzīmējot ar $V(X)$kopas $X$ vidējo aritmētisko, iegūstam

$V(\{S(A)\})=V(\{S(\widehat{A})\})=2\cdot1991-V(\{S(A)\})$, no kurienes seko, ka prasītais vidējais aritmētiskais ir vienāds ar 1991. (Šeit $\{S(A)\}$ir kopa, kas sastāv no visu apakškopu mazāko un lielāko elementu summām.

**40.22.** Tā kā uzdevumā skaitļi *a*, *b*, *c*, *d* ieiet simetriski, tad varam uzskatīt, ka $a\ge b\ge c\ge d$. Izmantojot šīs nevienādības, iegūstam

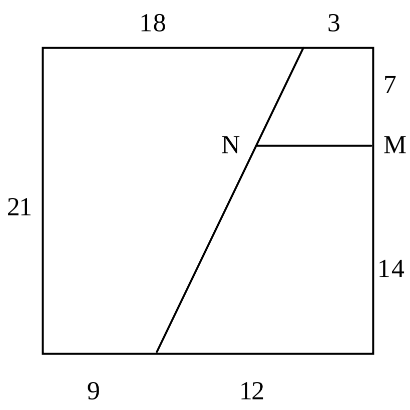
$2=2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd\ge$

$2b^2+2c^2+2d^2+2bc+2bd+2cd>$

$b^2+c^2+d^2+2bc+2bd+2cd=(b+c+d)^2$.

No šejienes $b+c+d<\sqrt{2}$. Tātad , atmetot skaitli *a*, pārējo skaitļu summa ir mazāka par $\sqrt{2}$ .

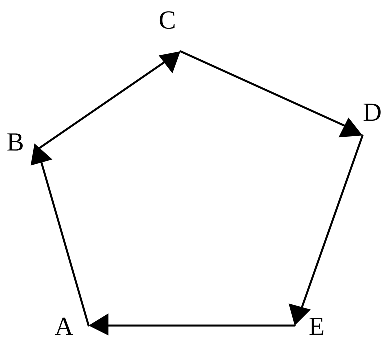
**40.23.** Sadalām kvadrātu kā parādīts 40.8. zīmējumā.




40.8. zīm.

Aprēķinām, ka nogriežņa $NM$ garums ir 6. Visu trapeču atbilstošie leņķi ir vienādi. Ar aprēķiniem pārliecināmies, ka atbilstošās malas ir proporcionālas. Tāpēc visas trīs trapeces ir līdzīgas.

**40.24.** Pieņemsim pretējo. Tad bultiņām pa piecstūra kontūru jāizvietojas pa ciklu (skat. 40.9. zīm.).




40.9. zīm.

Lai bultiņa uz malas *AE* rādītu uz punktu *A*, nepieciešams, lai *B* atrastos tuvāk taisnei *AE* nekā *D*. Tātad $S_{ABE} < S_{ADE}$, jo abiem trijstūriem pamati sakrīt, bet pirmajam augstums mazāks nekā otrajam. Līdzīgi iegūstam nevienādības

$S_{ADE} < S_{ECD} < S_{DBC} < S_{CAB} < S_{ABE}$.

No šīm nevienādībām seko, ka $S_{ABE} < S_{ABE}$ -- pretruna. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

**40.25.** Naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, dod atlikumu 0 vai 1. Skaitlis 1990, dalot ar 4, dod atlikumu 2. Lai izpildītos prasītais, katru divu izvēlēto skaitļu reizinājumam, dalot ar 4, jādod atlikums 2 vai 3.

Ja divi no izvēlētajiem skaitļiem ir pāra skaitļi, tad to reizinājums dalās ar 4. Tātad jābūt vismaz trim nepāra skaitļiem. No tiem divi, dalot ar 4, dod vienādus atlikumus (1 vai 3). Šo divu skaitļu reizinājums, dalot ar 4, dod atlikumu 1. Tātad prasītos 4 skaitļus izvēlēties nevar.

**40.26.** Apzīmēsim riņķu rādiusus ar $r_1, r_2$ un atbilstošos centrus ar $O_1, O_2$. Ar *O* apzīmējam nogriežņa $O_1O_2$ viduspunktu. Pierāda, ka attālums no punkta *O* līdz visām četrstūra malām ir vienāds ar $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

**40.27.** Ja $y = 1$, tad iegūstam atrisinājumu $x = 1$, $y = 1$.

Ja $y > 1$, tad pēc moduļa 4 iegūstam

$1 = 7^x - 3 \cdot 2^y \equiv (-1)^x \pmod 4$.

No šejienes seko, ka *x* ir pāra skaitlis $x = 2k$. Iegūstam

$(7^k + 1)(7^k - 1) = 3 \cdot 2^y$.

Tā kā $7^k+1$ ar 3 nedalās, tad iegūstam sistēmu

$$\begin{cases} 7^k+1=2^s \\ 7^k-1=3\cdot 2^t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2^s-3\cdot 2^t=2 \ .$$

Ja $s$ un $t$ abi lielāki par 1, tad vienādības kreisā puse dalās ar 4, tāpēc nav vienāda ar 2. Neviens no skaitļiem $s$ un $t$ nav 0, jo tad vienādības kreisā puse ir nepāra skaitlis. Atliek aplūkot divus gadījumus

a) $s=1$, tad $7^k+1=2$ ; atrisinājumu nav,

b) $t=2$, tad $7^k-1=6, \quad k=1, \quad x=2, \quad y=4$ .

Tātad sistēmai ir divi atrisinājumi (1, 1) un (2, 4).

**40.28.** Apzīmējam vektorus ar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_7$ un $\overrightarrow{A_i}=\vec{a}_i+\vec{a}_{i+1}+\vec{a}_{i+2}$ (numurēšana turpinās pa ciklu). Visu vektoru summu apzīmējam ar $\vec{A}$.

Pēc dotā $\left|\overrightarrow{A_i}\right|=\left|\vec{A}-\overrightarrow{A_i}\right|$ , $i$ = 1, 2, … , 7. Ceļot šīs vienādības skalārajā kvadrātā un saskaitot, iegūstam

$$\sum\left|\overrightarrow{A_i}\right|^2=7\cdot\vec{A}^2-2\cdot\left(\vec{A},\sum\overrightarrow{A_i}\right)+\sum\left|\overrightarrow{A_i}\right|^2 \ ,$$

$$2\cdot\left(\vec{A},\sum\overrightarrow{A_i}\right)=7\cdot\vec{A}^2 \ .$$

Tā kā $\sum\overrightarrow{A_i}=3\vec{A}$, tad iegūstam

$6\cdot\vec{A}^2=7\cdot\vec{A}^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{A}^2=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A}=\vec{0}$ , kas arī bija jāpierāda.

**40.29.** Pārveidojot, iegūstam, ka

$$4\left(4-(x+y+z-xyz)^2\right)=(2-2yz)(2-2xz)(2-2xy)+4x^2y^2z^2 \ .$$

No nevienādības

$$2-2yz=x^2+y^2+z^2-2yz=x^2+(y-z)^2\geq 0$$

un analoģiskām $2-2xz\geq 0$ , $2-2xy\geq 0$ seko, ka

$$4-((x+y+z)-xyz)^2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x+y+z-xyz\leq 2 \ ,$$

kas arī bija jāpierāda.

**40.30.** Pierādīsim, ka minimālais šķautņu skaits apskatāmajā grafā ir

$$C_{n-1}^2=\frac{(n-1)(n-2)}{2} \ .$$

Kā šāda grafa piemēru var ņemt grafu, kurā $n-1$ virsotne savienotas katra ar katru, bet viena ir izolēta.

Pierādīsim ka grafā jā būt vismaz $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ šķautnēm.

Aplūkosim divas virsotnes $A$ un $B$, kas nav savienotas ar šķautni. Tad pārējām virsotnēm jābūt savienotām katrai ar katru. Ja $C$ un $D$ nebūtu savienotas, tad punkti $A$, $B$, $C$, $D$ veidotu konfigurāciju, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

Tagad aplūkosim patvaļīgu punktu $C$ (atšķirīgu no $A$ un $B$). Tam noteikti jābūt savienotam ar $A$ vai $B$, citādi konfigurācija $A$, $B$, $C$, $D$ ($D$ – patvaļīgs punkts) ir pretrunīga. Tātad vēl jābūt vismaz $n-2$ šķautnēm.

Kopā iegūstam $C_{n-2}^{2}+(n-2)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ šķautnes. Prasītais pierādīts

**40.31.** Pieņemsim, ka $0<x<2$. Eksistē trijstūris ar malu garumiem 1, 1, $x$. Tāpēc eksistē trijstūris ar malu garumiem $f(1), f(1), f(x)$. Tātad

$$f(x)<2f(1) .$$

Ar līdzīgiem spriedumiem, izmantojot matemātisko indukciju, pierādām, ka naturāliem $n\geq 2$

$$f(n)\leq (n-1)f(2).$$

Izmantojot trijstūri ar malām $x, [x], 1$ prasīto novērtējumu iegūst skaitļiem $x$, kas nav veseli.

**40.32.** Apskatīsim grafu, kura virsotnes ir dotie punkti, bet taisnas šķautnes novilktas starp tiem punktiem, starp kuriem attālums ir minimālais.

Šīm šķautnēm nav citu kopīgu punktu, izņemot galapunktus. Citādi atrastos nesavienoti punkti ar mazāku attālumu. Veidojas plakans grafs ar $n$ virsotnēm, $s$ šķautnēm, $a$ apgabaliem un $k$ komponentēm. Novilksim vēl $k-1$ papildšķautnes, kas savieno atšķirīgās komponentes; izveidojas viena komponente, bet jauni apgabali neveidojas. Pēc Eilera formulas plakanam grafam

$$n-s-(k-1)+a=2 ,$$

tātad $s\leq n+a-2$.

Katram apgabalam ir vismaz 3 šķautnes, un katra šķautne pieder diviem apgabaliem, tātad $3a\leq 2s$ ; no šejienes

$$s\leq n+\frac{2}{3}s-2 \text{ un } s\leq 3(n-2) ,$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

**40.33.** Apskatām Dekarta koordinātu telpā līniju, kuras parametriskais vienādojums ir

$$x=t,\quad y=t^3,\quad z=t^5 .$$

Plakne, kuras vienādojums ir

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

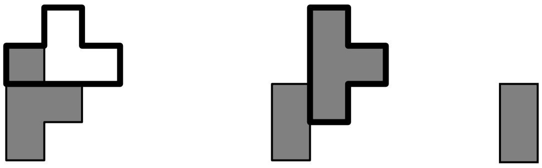
krusto šo līniju punktos, kuru parametru $t$ var atrast no vienādojuma

$$At + Bt^3 + Ct^5 + D = 0.$$

Tā kā vismaz viens no skaitļiem $A$, $B$, $C$ nav 0, tad vienādojuma pakāpe ir nepāra skaitlis, kas nepārsniedz 5. Tātad vienādojumam ir vismaz 1 un ne vairāk kā 5 atrisinājumi.

**40.34.** Ja $n$ ir nepāra skaitlis, tad kvadrātam ir nepāra skaits rūtiņu. Katrā gājienā tiek izmainīts pāra skaits rūtiņu, tātad pēc jebkāda skaita gājienu būs izmainīta krāsa pāra skaitam rūtiņu, un visu kvadrātu pārkrāsot nevarēs.

Ja $n$ ir pāra skaitlis, tad to izdarīt var. Zīmējumā parādīts kā, izmantojot trīs pārkrāsošanas, var pārkrāsot tieši divas blakusrūtiņas. Sadalot kvadrātu šādos blakusrūtiņu pāros, varam pārkrāsot visu kvadrātu.



40.10. zīm.

**40.35.** Pierādīsim ar matemātisko indukciju līdzīgu apgalvojumu, kur 1990 aizstāts ar $k$. Ja $k = 1$, visi $A$ skaitļi ir pirmskaitļi; tātad var ņemt $B = A$ un $p = 1$.

Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs visiem $k < n$, un pierādīsim, ka tas izpildās ja $k = n$.

Aplūkosim divus gadījumus:

1) Eksistē tāds naturāls skaitlis $a$, ka $a > 1$ un $a$ ir bezgalīgi daudzu kopas $A$ elementu dalītājs; Apzīmēsim šo elementu veidoto $A$ apakškopu ar $A_1$. Izveidojam kopu

$$\overline{A} = \left\{ \frac{x}{a} \quad | \quad x \in A_1 \right\}.$$

Tad $\overline{A}$ ir bezgalīga, un katrs $\overline{A}$ elements ir ne vairāk kā $n-1$ pirmskaitļu reizinājums (jo $a$ satur vismaz vienu pirmskaitli kā reizinātāju). No $\overline{A}$ izvēlāmies, apakškopu $\overline{B}$ un skaitli $\overline{p}$, kam izpildās uzdevuma nosacījumi; tad kopa $B = \{x \cdot a \quad | \quad x \in \overline{B}\}$ un $p = \overline{p} \cdot a$ der par meklējamiem.

2) Katram naturālam *a* eksistē tikai galīgs daudzums tādu *A* elementu, kas dalās ar *a*. Ņemam patvaļīgu $a_1 \in A$. Ir tikai galīgs skaits *A* elementu, kas dalās ar kādu no $a_1$ pirmreizinātājiem. Atrodam tādu $a_2$, kas ne ar vienu no tiem nedalās. Pēc tam atrodam tādu $a_3$, kas nedalās ne ar vienu no $a_1$ un $a_2$ pirmreizinātājiem, utt. Iegūstam bezgalīgu kopas *A* elementu virkni $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Šīs virknes elementi veido kopu *B*, kurā jebkuru divu elementu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Apgalvojums pierādīts.