Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 41. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

41.1. Nē, tā nevar būt. Norādītais skaitlis *A* dalās ar 3, bet nedalās ar 9. Ja sākotnējais skaitlis dalās ar 3, tad tā ciparu summa dalās ar 3, un reizinājums dalās ar 9. Ja sākotnējais skaitlis nedalās ar 3, tad tā ciparu summa arī nedalās ar 3, un reizinājums nedalās ar 3. Redzam, ka nevienā gadījumā nevaram iegūt skaitli *A*.

41.2. Rūtiņu, kas atrodas *n*-tajā kolonnā (no kreisās puses) un *m*-tajā rindiņā (no apakšas) apzīmēsim (*n*, *m*). Tad rūtiņā $(1, 1)$ ierakstīts vieninieks, jo ne uz leju, ne pa kreisi no tā nevar atrasties neviens skaitlis. Līdzīgu iemeslu dēļ skaitlis 2 ierakstīts rūtiņā (1, 2) vai (2, 1). Uzskatīsim, ka tas ierakstīts rūtiņā (2, 1). Tad pirmā rinda ir noteikta; tajā pēc kārtas ierakstīti skaitļi no 1 līdz 10.

Analoģiski spriežot, skaitlis 11 ierakstīts rūtiņā (1, 2). Tas nosaka pirmās kolonnas skaitļus: 1, 11, 21, 31, … , 91. Tā kā rūtiņā (10, 10) jābūt skaitlim 100, tad noteikta ir 10-tā rindiņa (sākas ar 91 un beidzas ar 100) un 10-tā kolonna (sākas ar 10 un beidzas ar 100). Tagad visām rindām un visām kolonām ir zināmi pirmie un pēdējie elementi; tātad noteikti ir visi to elementi. Rūtiņā (*n*, *m*) ir jāieraksta skaitlis $n+10\cdot(m-1)$.

Ja skaitli 2 ierakstām rūtiņā (1, 2), tad iegūstam otru simetrisku tabulu: rūtiņā (*n*, *m*) būs ierakstīts skaitlis $10\cdot(n-1)+m$.

41.3. Pastāv divas iespējas:

1) $x_1=\frac{1}{1+x_1}, \quad x_2=\frac{1}{1+x_2}$.

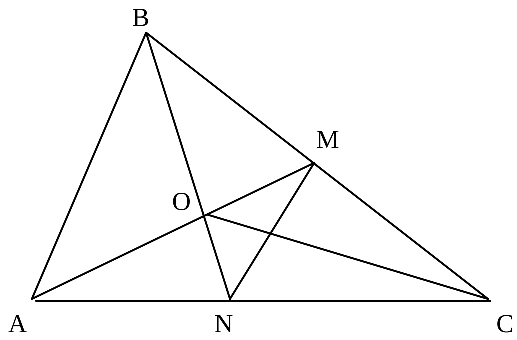
Tas nozīmē, ka abas saknes apmierina vienādojumu $x=\frac{1}{1+x}$, kas pārveidojas par $x^2+x-1=0$. Tātad $p=1, q=-1$.

2) $x_1=\frac{1}{1+x_2}, \quad x_2=\frac{1}{1+x_1}$.

Šajā gadījumā iegūstam, ka abas saknes apmierina vienādojumu $x=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=0$, kas pārveidojas par $x^2+x-1=0$, jeb $x=\frac{1}{1+x}$. Taču tas nozīmē, ka

$x_2 = \dfrac{1}{1+x_1} = x_1$, bet tā nevar būt, jo vienādojumam $x^2 + x - 1 = 0$ abas saknes ir dažādas. Tātad šis gadījums nav iespējams.

41.4. Trijstūra laukumu apzīmēsim ar $[ABC]$. Pakāpeniski iegūstam (skat. 41.1. zīm.).



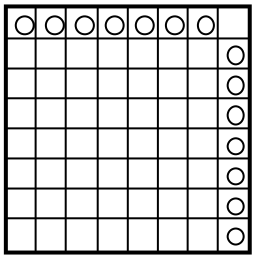
40.1. zīm.

$$\frac{[ABC]}{[MNC]} = \frac{[ABC][BNC]}{[BNC][MNC]} = \frac{AC}{NC} \cdot \frac{BC}{MC} = \frac{[AOC]}{[NOC]} \cdot \frac{[BOC]}{[MOC]} =$$
$$\frac{[AOC]}{[MOC]} \cdot \frac{[BOC]}{[NOC]} = \frac{AO.}{OM} \cdot \frac{BO}{ON} = \frac{[AOB]}{[OMB]} \cdot \frac{[OMB]}{[MON]} = \frac{[AOB]}{[MON]}.$$

Tātad $\dfrac{S_0}{S_3} = \dfrac{S_1}{S_2}$, no kurienes seko prasītais.

41.5. No dotajām figūrām izvēlamies 8, pa vienai katrā kolonnā. Ja tās visas atrodas vienā rindiņā, tad kādu no tām aizvietojam ar citu, kas atrodas tajā pašā kolonnā. Rezultātā šīs figūras “nosedz” visas kolonnas un vismaz 2 rindiņas. Katrā nenosegtajā kolonnā izvēlamies pa vienai figūrai. Kopā iznāk ne vairāk par 14 figūrām. Jebkuru no neizmantotajām figūrām var izmest.

Ja uz galdiņa izvietotas tikai 14 figūras, uzdevuma apgalvojums nepaliek spēkā. Piemēram, ja tās izvietotas kā parādīts 40.2. zīmējumā.



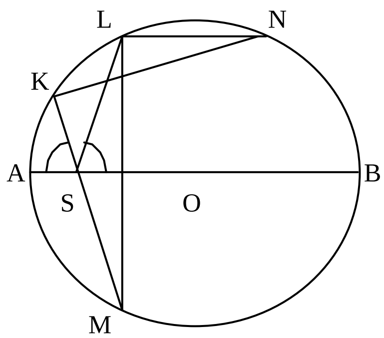
40.2. zīm.

40.6. Pārveidojam pirmo vienādojumu formā $2\sin x \sin 2x = 0$ un otro -- $2\sin 2x \sin 3x = 0$.

Pirmajam vienādojumam intervālā $[0,\ 2\pi)$ ir 5 saknes, bet otrajam vienādojumam šajā intervālā ir 9 saknes.

40.7. No dotā $n = (10m+5)^2 = 100(m^2+m)+25$. Skaitļa n trešais no beigām cipars ir skaitļa (m^2+m) pēdējais cipars. Tā kā (m^2+m) ir pāra skaitlis, tad tā pēdējais cipars ir pāra skaitlis.

40.8. Turpinām nogriezni *KS* līdz krustpunktam *M* ar riņķa līniju (skat. 40.3. zīm.).

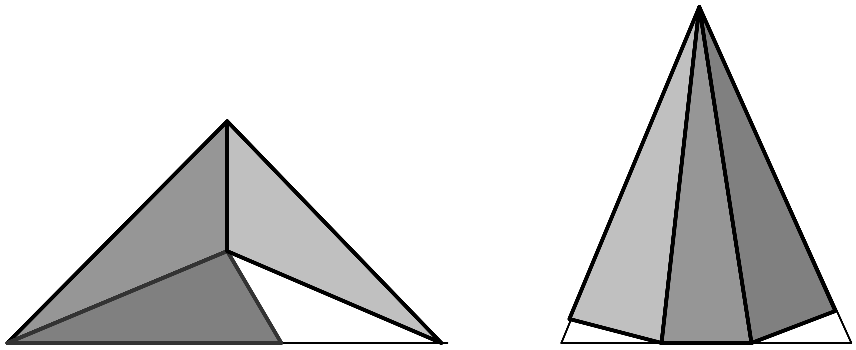


40.3. zīm.

$\angle ASK = \angle OSL$ (no dotā) un $\angle ASK = \angle MSO$ (krustleņķi); Tāpēc $\angle OSL = \angle OSM$ un *M* un *L* ir simetriski punkti attiecībā pret diametru *AB*.

Tā kā $\angle MKN$ ir taisns, tad arī $\angle MLN$ ir taisns. Tātad $LN \perp LM$ un $AB \perp LM$. No tā seko, ka $LN \parallel AB$.

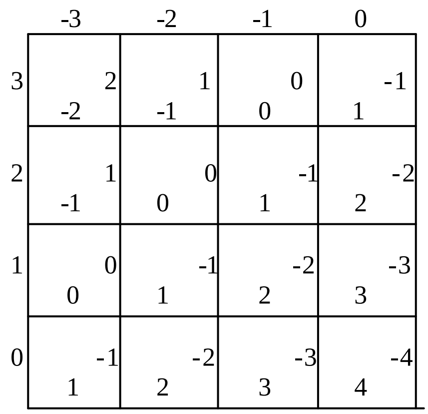
41.9. Konstrukcijas parādītas 41.4. zīmējumā.



a) b)

41.4. zīm.

41.10. Sanumurēsim visus iegūtā režģa stienīšus, kā parādīts 41.5. zīmējumā $(n = 4)$.



41.5. zīm.

Viegli pārbaudīt, ka visu numuru summa ir 0. Sauksim par stūrīša svaru tā malu numuru summu. Stūrīši iedalās 4 tipos. Katra tipa stūrīšiem ir fiksēts svars. Tas parādīts tabulā.

Stūrīša tips	└	┐	┌	┘
Stūrīšu skaits	*a*	*b*	*c*	*d*
Stūrīša svars	1	-1	0	0

Visu stūrīšu kopējais svars ir 0; tātad $a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0$. No kurienes seko vajadzīgais: $a = b$.

41.11. Nē, nevar. Ja polinoma $P(x)$ pakāpe ir n, tad atvasinājuma $F(x)$ pakāpe ir $n-1$ un to reizinājuma pakāpe ir $2n-1$, bet 100 ir pāra skaitlis.

41.12. Tā kā $\cos x \le 1$, tad dotā vienādība iespējama tikai, ja

$$\cos x = \cos 2x = \cos 3x = 1.$$

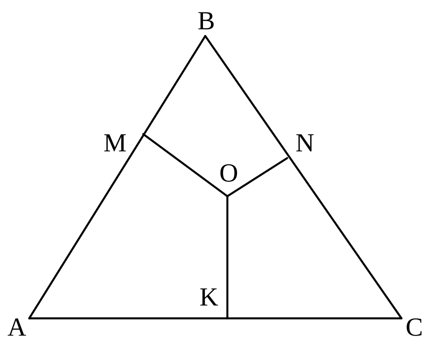
Tad $\sin x = \sin 2x = \sin 3x = 0$, un meklējamā summa ir vienāda ar 0.

41.13. Tā kā, izmantojot pagriezienus, kubu var savienot pašu ar sevi tā, lai patvaļīga virsotne pārietu par jebkuru citu, tad pierādījumā varam uzskatīt, ka viena muša *A* palika uz vietas.

Aplūkosim mušu *B*, kas atrodas kuba pretējā virsotnē. Ja tā arī paliek uz vietas, tad varam ņemt mušas *A*, *B* un jebkuru mušu *C*. Tas seko no tā, ka visi trijstūri, kuriem divas virsotnes ir kuba pretējās virsotnes, bet trešā -- patvaļīga kuba virsotne, ir vienādi.

Ja muša *B* pārlido uz citu virsotni, tad par trešo mušu ņemam to, kas pārlido uz virsotni *B* (pirmās divas ir *A* un *B*).

41.14. Tā kā $\angle AMO = \angle AKO = 90°$, tad ap četrstūri *AMOK* var apvilkt riņķa līniju ar diametru *AO* (skat. 41.6. zīm.).



41.6. zīm.

Tā kā $\angle MAK = 60°$, tad $MK = AO \cdot 60°$ (pamatojiet to!). Tāpēc $\frac{AO}{MK} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Līdzīgi $\frac{BO}{MN} = \frac{CO}{NK} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

41.15. Pieņemsim pretējo, ka pēc pārkārtošanās kāds *n*-tās kolonas karavīrs n_i vairāk nekā par 10 centimetriem pārsniedz *m*-tās kolonas karavīru m_i. Karavīri tagad kolonnās sakārtoti šādi:

$$n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_i \cdots \le n_{10} \text{ un } m_1 \le m_2 \le \cdots \le m_i \le \cdots \le m_{10}.$$

Pirms pārkārtošanās neviens no karavīriem $n_i, \cdots, n_{10}$ nevarēja atrasties vienā rindā ar karavīriem $m_1, \cdots, m_i$, jo visi norādītie *n*-tās kolonas karavīri vairāk kā par 10 cm pārsniedz visus norādītos *m*-tās kolonas karavīrus. Taču šeit norādīti 11 karavīri, tātad kaut kādi divi atradās vienā rindā. Iegūtā pretruna pierāda prasīto apgalvojumu.

41.16. Ievērojam, ka

$$\cos 4x - \cos 4y = 2(\cos 2x - \cos 2y) \cdot (\cos 2x + \cos 2y).$$

Viegli pārbaudīt, ka, ja izpildās kaut viena no vienādībām

$$\cos x = \cos y, \quad \sin x = \sin y, \quad \cos x = \sin y, \quad \cos y = \sin x,$$

tad dotais reizinājums ir 0. Tā kā vērtības ir tikai divas, tad atliek vienīgā iespēja

$$\cos x = \sin x \text{ un } \cos y = \sin y .$$

Vienkārša pārbaude parāda, ka arī šajā gadījumā izpildās vienādība $\cos 4x = \cos 4y$.

41.17. Apzīmēsim trijstūra laukumu ar *S*, bet augstumus ar h_a, h_b, h_c. No formulas $S = \frac{abc}{4R} = \frac{ch_c}{2}$ seko vienādība $ab = 2Rh_c$; līdzīgi $ac = 2Rh_b, bc = 2Rh_a$. Iegūstam

$$ab + ac + bc = 2R(h_a + h_b + h_c) \le 2R(m_1 + m_2 + m_3)$$

(mediāna ir ne īsāka par atbilstošo augstumu).

41.18. Acīmredzot sistēmai ir atrisinājums pozitīvos skaitļos (1, 1, 1). Pierādīsim, ka cita atrisinājuma pozitīvos skaitļos nav.

Pieņemsim no pretējā, ka tai ir atrisinājums (*x*, *y*, *z*) pozitīvos skaitļos, kas ir atšķirīgs no (1, 1, 1). Skaidrs, ka kāds no šiem skaitļiem ir lielāks par 1 un kāds – mazāks par 1. Tā kā sistēma ir simetriska attiecībā pret mainīgo *x*, *y*, *z* ciklisku samainīšanu, tad varam pieņemt, ka $x > 1$.

Apskatīsim vairākus gadījumus (atceroties, ka vai nu $0 < y < 1$, vai $0 < z < 1$).

1. $y \ge 1, \quad 0 < z < 1$.

Tā kā $x^3 > x, \quad y^5 \ge y^3, \quad z > z^5$, tad 1. un 3. Vienādojumi ir pretrunīgi.

Līdzīgas pretrunas iegūst arī pārējos gadījumos.

41.19. Izmantosim matemātisko indukciju pēc kvartālu skaita *n*.
Ja $n = 1$, viss ir skaidrs. Pieņemsim, ka apgalvojums jau pierādīts pilsētām, kas satur mazāk nekā k kvartālus, un apskatīsim pilsētu ar k kvartāliem. Šķirosim divus gadījumus.

1) Uz pilsētas kontūra eksistē laukums, no kura var braukt pilsētā iekšā. Sāksim no šī laukuma virzīties pilsētā pa ielām saskaņā ar ieviestajiem virzieniem. Agri vai vēlu notiks viens no diviem:

a) mēs izbrauksim uz kontūra;

b) mēs nonāksim laukumā, kurā jau esam bijuši.

Abos gadījumos būsim ierobežojuši rajonu, kas satur mazāk nekā *k* kvartālus un kam var apbraukt apkārt pa tā kontūru. Šajā rajonā pēc induktīvā pieņēmuma var atrast vajadzīgo kvartālu.

2) Tāda laukuma uz kontūra nav. Tādā gadījumā sāksim virzīties pilsētā iekšā pretēji norādītajiem virzieniem un izdarīsim tādu pašu spriedumu kā pirmajā gadījumā.

41.20. Pārbaude parāda, ka $m \geq 3$. Pārveidosim vienādojumu formā

$$n! = m!(m! - 2).$$

Skaidrs, ka $n > m$. Reizinātājs $m! - 2$ nedalās ar 3. Tātad $n!$ satur pirmreizinātāju 3 tādā pašā pakāpē, kā $m!$. Tas nozīmē, ka $n = m + 1$ vai $n = m + 2$.
Ja $n = m + 1$, iegūstam vienādojumu $3 = m! - m$. Tātad 3 dalās ar *m*, t.i., $m = 3, n = 4$.

Pārbaude parāda, ka šis atrisinājums der.
Ja $n = m + 2$, iegūstam vienādojumu $m^2 + 3m + 4 = m!$. Tātad 4 dalās ar *m*, t.i., $m = 4$, $n = 5$. Šīs vērtības neapmierina sākotnējo vienādojumu.

41.21. Sadalīsim visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100 četrās grupās pa 25 sekojošiem skaitļiem. Vienā no šīm grupām ir vismaz 9 dotie skaitļi. Samazināsim visus šīs grupas skaitļus par vienu un to pašu lielumu tā, lai mazākais no dotajiem skaitļiem kļūtu vienāds ar 1; tad pārējie no 9 skaitļiem nepārsniedz 25. Ja kāds no dotajiem skaitļiem ir 9, tad realizējas starpība $9 - 1 = 8$.

Aplūkojam astoņus skaitļu trijniekus, kas satur visus skaitļus no 1 līdz 25 (izņemot 9):
(1, 10, 18), (2, 11, 19), (3, 12, 20), (4, 13, 21),
(5, 14, 22), (6, 15, 23), (7, 16, 24), (8, 17, 25).

Kādā no šiem trijniekiem būs divi dotie skaitļi; starpība starp tiem būs 8, 9 vai 17.

41.22. No vienādības $a+b+c=1$ seko, ka $1+a=(1-b)+(1-c)$. No nevienādības starp skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam
$1+a=(1-b)+(1-c)\geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$.

Līdzīgi
$1+b\geq 2\sqrt{(1-a)(1-c)}$,
$1+c\geq 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$.

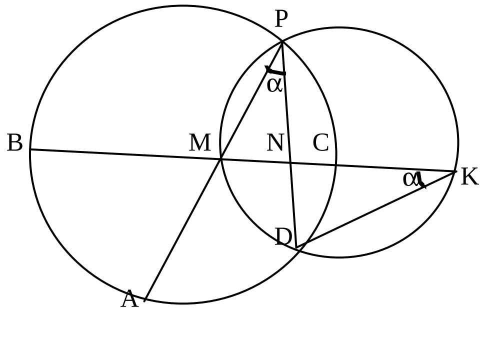
Sareizinot šīs trīs nevienādības, iegūstam prasīto.

41.23. Pieņemsim, ka visi progresijas locekļi ir pirmskaitļi. Ja mēs pierādīsim, diferencei d jādalās ar 2, 3, 5, 7, 11, tad $d\geq 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=2310$, un būs iegūta pretruna.

Apzīmēsim ar p vienu no minētajiem pirmskaitļiem. Pieņemsim pretējo, ka d nedalās ar p. Pierādīsim, ka pirmie p progresijas locekļi dod dažādus atlikumus, dalot ar p. Tiešām, ja a_j un a_i dotu vienādus atlikumus, dalot ar p, tad $a_j-a_i=d(j-i)$ dalās ar p. Tā kā d nedalās ar p, tad $(j-i)$ dalās ar p. Bet tas nav iespējams, jo $|j-i|<p$.

Tā kā dažādo atlikumu skaits ir p, tad starp atlikumiem būs arī skaitlis 0. Tātad vismaz viens progresijas loceklis dalās ar p.
Šis loceklis var būt pirmskaitlis tikai, ja vienāds ar p. Tā kā $p<12$, tad jāaplūko gadījums, kad $a_1<12$. Tad aplūkosim progresijas locekli ar numuru (a_1+1) (tas ir viens no aplūkojamajiem 12 progresijas locekļiem). Šis loceklis ir vienāds ar $a_1+a_1d=a_1(1+d)$, un, tātad, nav pirmskaitlis ($a_1>1, 1+d>1$). Apgalvojums pierādīts.

41.24. Konstruēsim riņķa līniju caur D, M un P; apzīmēsim tās otro krustpunktu ar taisni BC ar K (skat. 41.7. zīm.).



41.7. zīm.

Apzīmēsim $\angle APD = \alpha$. Lielums α nav atkarīgs no punkta *P* izvēles. No vienādības $\angle BKD = \angle MKD = \angle MPD = \alpha$ seko, ka $\angle BKD$ ir konstants lielums α. Tātad punkts *K* ir fiksēts.

No teorēmas par hordu nogriežņu reizinājumiem seko, ka
$(BM + MN) \cdot NC = PN \cdot ND = MN \cdot NK = MN \cdot (NC + CK)$, no kurienes
$\frac{BM \cdot NC}{MN} = CK = \text{const}$, ko arī vajadzēja pierādīt.

41.25. Pieņemsim, ka *A* ir patvaļīgs kongresa delegāts; apzīmēsim ar $\{K_1, K_2, \dots, K_{10}\}$ viņa simpātiju kopu. Ja tā apmierina visus delegātus, tad vajadzīgais pierādīts. Pieņemsim, ka tā neapmierina delegātu *B*, kura simpātiju kopa ir $\{S_1, S_2, \dots, S_{10}\}$(tai nav kopīgu elementu ar *A* simpātiju kopu). Apskatīsim četras iespējamās komisijas:

1) $\{K_1, \dots, K_5, S_1, \dots, S_5\}$,
2) $\{K_1, \dots, K_5, S_6, \dots, S_{10}\}$,
3) $\{K_6, \dots, K_{10}, S_1, \dots, S_5\}$,
4) $\{K_6, \dots, K_{10}, S_6, \dots, S_{10}\}$.

Mēs apgalvojam, ka vismaz viena no tām apmierina visus delegātus. Tiešām, pieņemsim pretējo, ka šīs komisijas neapmierina attiecīgi delegātus *C*, *D*, *E*, F. Tad viegli pārbaudīt, ka 6 cilvēku grupu *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, F neapmierina nekāda divu cilvēku komisija. Prasītais pierādīts.

41.26. Ja $a_k < a_{k+1}$, tad $\frac{a_k}{a_{k+1}} < 1$. Ja $a_k \geq a_{k+1}$, tad $\frac{a_k}{a_{k+1}} < \frac{a_{k+1} + 1}{a_{k+1}} < 2$, jo $a_{k+1} > 1$.
Pieņemsim, ka *s* indeksa *k* vērtībām pastāv nevienādība $a_k < a_{k+1}$, bet $n - 1 - s$ vērtībām pastāv nevienādība $a_k \geq a_{k+1}$. Tad
$a_n - a_1 = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) \leq s$.
Tāpēc $\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{a_1 + s}{a_1} < s + 1$, jo $a_1 > 1$.

Tātad apskatāmā summa mazāka par
$s + 2 \cdot (n - 1 - s) + s + 1 = 2n - 1$.

41.27. *Lemma.* Ja uzdevumā norādītajā veidā nokrāsoti nogriežņi, kas savieno 6 punktus, tad noteikti atradīsies trijstūris, kura visas malas nokrāsotas vienādi.

Pierādījums. Izvēlamies vienu punktu. No pieciem nogriežņiem, kas no tā iziet, vismaz trīs nokrāsoti vienādi (pieņemsim, balti). Ja kaut divi no šo nogriežņu otrajiem galapunktiem savienoti ar baltu nogriezni, iegūstam trijstūri ar baltām malām; pretējā gadījumā iegūstam trijstūri ar melnām malām, kura virsotnes ir šo trīs nogriežņu galapunkti. Lemma pierādīta.

Pieņemsim, ka starp 7 dotajiem punktiem esam atraduši baltu trijstūri *ABC*. Apskatām 6 punktus bez *A*. Starp tiem jābūt vienkrāsainam trijstūrim. Ja tam nav malas *BC*, esam atraduši prasītos trijstūrus. Tāpēc apskatīsim gadījumu, kad ir vienkrāsains trijstūris BCA_1; skaidrs, ka tas ir balts. Līdzīgi atrodam arī baltus trijstūrus ACB_1 un ABC_1.

Ja kaut divi no punktiem A_1, B_1, C_1 atšķiras (pieņemsim, A_1 nav B_1), mēs iegūstam prasītos trijstūrus BCA_1 un ACB_1. Tātad jāaplūko gadījums, kad tie visi ir viens punkts *S*. *ABCS* sauksim par baltu tetraedru.

Aplūkosim 3 atlikušos punktus. Ja kaut viens no tiem savienots ar divām baltā tetraedra virsotnēm ar baltiem nogriežņiem (piemēram, *M* ar *A* un *B*), iegūsim divus baltus trijstūrus *MAB* un *CAS*. Tātad balto nogriežņu, kas savieno tetraedru ar pārējiem punktiem, ir ne vairāk kā 3. Tas nozīmē, ka ir tetraedra virsotne (pieņemsim, S), kas savienota ar pārējiem punktiem *M*, *N*, *K* ar melniem nogriežņiem. Ja visi punkti *M*, *N*, *K* savienoti savā starpā ar baltiem nogriežņiem, der trijstūri *ABC* un *MNK*; ja, piemēram, *M* un *N* savienoti ar melnu nogriezni, der trijstūri *ABC* un *MNS*.

41.28. Apzīmēsim doto polinomu ar $f(x)$. Tad

$$f(n)=m,\quad f(n+1)=m+1,\ f(n+2)=m+2.$$

Aplūkosim jaunu polinomu $g(x)=f(x)-x-m+n$.

Viegli pārliecināties, ka $g(n)=g(n+1)=g(n+2)=0$.

Tā kā $g(x)$ koeficients pie vecākā locekļa ir 2, tad

$$g(x)=2(x-n)(x-(n+1))(x-(n+2)).$$

Vienādībā

$$2x^3-60x^2+(a-1)x-m+n=2(x-n)(x-(n+1))(x-(n+2))$$

pielīdzinām koeficientus pie x^2; iegūstam $2(n+n+1+n+2)=60$, tātad $n=9$. Pielīdzinot brīvos locekļus, iegūstam $9-m=-2\cdot 9\cdot 10\cdot 11$, no kurienes $m=1989$. Tātad meklējamās polinoma vērtības ir 1989, 1990, 1991.

41.29. No sakarības starp sekanšu nogriežņiem riņķī $BN\cdot BA=BM\cdot BL$ un $CK\cdot CA=CL\cdot CM$. Izdalot šīs vienādības vienu ar otru, iegūstam

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BN\cdot AB\cdot CL}{BL\cdot CK\cdot CA}.$$

No bisektrises īpašības seko, ka $\frac{AB}{AC}=\frac{BL}{CL}$; tāpēc $\frac{BM}{MC}=\frac{BN}{CK}$.

No Čevas teorēmas $\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CK}{KA}\cdot\frac{AN}{NB}=1$; tāpēc $AN = NK$. No šīs vienādības un no tā, ka $\angle NAL = \angle KAL$ seko trijstūru ANL un AKL vienādība. Tātad AL ir dotā riņķa diametrs, un $\angle AML = 90°$.

41.30. Aplūko šīs funkcijas redukciju pēc moduļa 1991 un pierāda, ka kopā $Z_{1991} = \{0, 1, 2, \ldots, 1990\}$ tai izpildās īpašības

1) $f(x) \equiv y \pmod{1991} \quad \Leftrightarrow \quad f(y) \equiv x \pmod{1991}$,

2) $f(x) \not\equiv x \pmod{1991}$.

Tātad kopai Z_{1991} jāsadalās skaitļu pāros, bet tas nav iespējams, jo tā satur nepāra skaitu elementu.

42.31. Apzīmēsim $\frac{1}{x^2+y^2}=t$. Tad $x=\frac{12}{5(t+1)}$, $y=\frac{4}{5(1-t)}$. Tāpēc

$$x^2+y^2=\frac{1}{t}=\frac{144}{25(t+1)^2}+\frac{16}{25(t-1)^2}.$$

Pārveidojot, iegūstam

$$25t^4-160t^3+206t^2-160t+25=0.$$

Izdalām ar t^2

$$25\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-160\left(t+\frac{1}{t}\right)+206=0.$$

Apzīmējam $t+\frac{1}{t}=z$; tad

$$25\left(z^2-2\right)-160+206,\quad z_1=\frac{6}{5},\quad z_2=\frac{26}{5}.$$

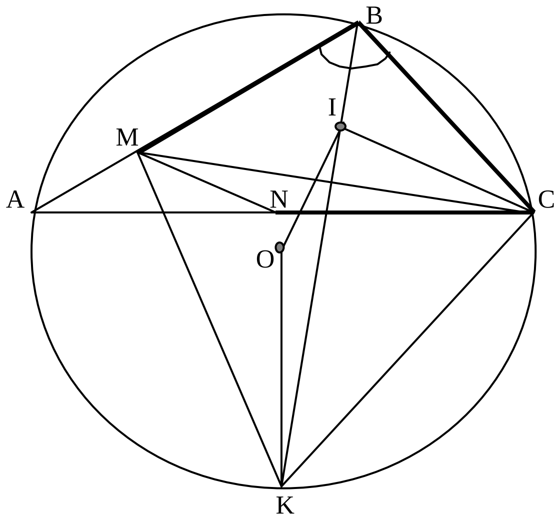
Pirmajā gadījumā atrisinājumu nav. Otrajā gadījumā $t_1=5, \quad t_2=\frac{1}{5}$;

Atbilstoši $x_1=\frac{2}{5}, y_1=-\frac{1}{5}$ un $x_2=2, y_2=1$.

Pārbaude parāda, ka abi atrisinājumi der.

41.32. Katram atzīmētajam kubiņam aplūkosim 3 rindas no *n* kubiņiem katra, kas šo atzīmēto kubiņu satur. Ja prasītā taisnleņķa trijstūra nebūtu, tad vismaz divas no šīm rindām citus atzīmētos kubiņus nesaturētu. Tad šādu rindu iznāktu vairāk nekā $\frac{3}{2}n^2\cdot 2=3n^2$ (katru rindu var ieskaitīt tikai vienu reizi), bet kubā pavisam ir tikai $3n^2$ rindu. (Ar rindu saprotam *n* kubiņus, kuru centri atrodas uz taisnes, kas paralēla vienai no kuba šķautnēm.)

41.33. Apzīmēsim ievilktā riņķa centru ar *I*, apvilktā riņķa centru ar *O*, punktu, kur *BI* pagarinājums krusto apvilkto riņķa līniju, ar *K* (skat. 41.8. zīm.).



41.8. zīm.

Mēs pierādīsim, ka trijstūri *CNM* un *KOI* ir vienādi; no tā sekos, ka $NM = OI$. Mēs pierādīsim, ka trijstūris *CNM* iegūstams no trijstūra *KOI* ar pagriezienu par 90°; no tā sekos, ka $NM \perp OI$.

Apzīmēsim riņķa rādiusu ar *R*. Tad $BC = 2R\sin A = R$; tātad arī $BM = CN = R$. Tā kā *BI* ir $\angle B$ bisektrise, tad *K* ir loka *AC* viduspunkts, tāpēc $OK \perp NC$; skaidrs arī, ka $OK = NC$.

Ievērosim, ka $\Delta MBK = \Delta CBK$ (pēc divām malām un leņķa starp tām). Tāpēc $MK = CK$. Tā kā $\angle BKC = \angle BAC = 30°$, tad $\angle MKC = 60°$; MKC ir vienādmalu trijstūris, un tātad $MC = CK$.

No trijstūra *BIC* ārējā leņķa īpašības seko, ka

$\angle CIK = \angle CBK + \angle ICB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA)$. Tai pašā laikā

$\angle ICK = \angle ICA + \angle ACK = \frac{1}{2}\angle BCA + \angle ABK = \frac{1}{2}(\angle BCA + \angle ABC)$.

Tātad $\angle CIK = \angle ICK$, IKC ir vienādsānu trijstūris un $CK = IK$. Tā kā jau pierādīts, ka $MC = CK$, iegūstam, ka $MC = IK$.

Trijstūris *MBC* ir vienādsānu, tātad tā virsotnes leņķa bisektrise ir arī augstums; tāpēc $IK \perp MC$. Beidzot, $\angle OKI = \angle NCM$ kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām. Tāpēc $\Delta OKI = \Delta NCM$ pēc divām malām un leņķa starp tām. Divu malu pāru perpendikularitāte nosaka to, ka tie iegūstami viens no otra ar pagriezienu par 90°. Līdz ar to prasītais pierādīts.

41.34. Aplūkojam kā mainās attāluma kvadrāts no punkta līdz koordinātu sākumpunktam. Pieņemsim, ka esam nonākuši punktā, kuram attāluma kvadrāts līdz koordinātu sākumpunktam ir maksimālais. Var pierādīt, ka tas var samazināties tikai gadījumā, ja tas ir pretējs iepriekšējam gājienam, bet tas ir aizliegts. Tāpēc attālums visu laiku palielināsies un atgriezties sākumpunktā nav iespējams.

41.35. Ja kāds $n_i = 1$, tad viegli iegūt, ka arī pārējie n_k ir vieninieki. Tāpēc pieņemsim, ka visi n_i ir atšķirīgi no 1. Protams tie ir nepāra skaitļi. Apzīmēsim skaitļa n_i mazāko pirmreizinātāju ar p_i.

No kongruences $2^{n_i} \equiv 1 \pmod{n_{i+1}}$ seko, ka $2^{n_i} \equiv 1 \pmod{p_{i+1}}$.

No Fermā mazās teorēmas seko, ka $2^{p_{i+1}-1} \equiv 1 \pmod{p_{i+1}}$.

Apzīmēsim ar *x* mazāko naturālo skaitli, kuram $2^x \equiv 1 \pmod{p_{i+1}}$; skaidrs, ka $x > 1$.

Tad $x \mid n_i$ un $x \mid p_{i+1} - 1$.

No pirmās dalāmības seko, ka $p_i \le x$ (jo p_i ir mazākais n_i dalītājs, neskaitot 1); no otrās dalāmības seko, ka $p_{i+1} > x$.

Rezultātā iegūstam, ka $p_i < p_{i+1}$ visiem *i*. Šīs nevienādības cikliski dod pretrunu. Apgalvojums pierādīts.