Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 42. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

9. klase

42.1. Atrisināt vienādojumu

$$x^2 + x = \frac{2}{x^2 + x + 1}.$$

42.2. Pirmajā martā 10 veikalos šokolādi "Ezis" pārdeva par vienādu cenu. Pēc tam katru dienu katrā veikalā cenu paaugstināja vai nu divas, vai trīs reizes. Šodien visas cenas ir dažādas. Pierādīt, ka šodien lielākā cena vismaz 27 reizes pārsniedz mazāko.

42.3. Jānim ir vairākas apaļas senlaiku monētas; nevienas monētas diametrs nepārsniedz 10 cm. Viņš tās glabā plakanā taisnstūra kastītē ar izmēriem 30 cm $\times$ 70 cm; monētas novietotas vienā slānī. Andris uzdāvināja viņam vienu monētu ar diametru 25 cm. Pierādīt, ka tagad Jānis monētas var novietot vienā slānī kastītē ar izmēriem 55 cm $\times$ 55 cm.

42.4. Pusriņķa diametrs ir *AB*; uz tā pagarinājuma aiz punkta *B* ņemts punkts *C* un no tā novilkta pieskare *CN*. Pierādīt, ka leņķa *CAN* bisektrise atšķeļ no *ANB* vienādsānu taisnleņķa trijstūri.

42.5. Doti *n* akmeņi ar masām 1 kg, 2 kg, 3 kg, … , *n* kg. Kādām *n* vērtībām tos var sadalīt divās kaudzēs ar vienādām masām? (Akmeņus skaldīt nedrīkst)

10.klase

42.6. Trīs skaitļi veido aritmētisku progresiju, un to kvadrāti arī veido aritmētisku progresiju (tai pašā kārtībā). Pierādīt, ka visi skaitļi ir vienādi savā starpā.

42.7. Dots izliekts četrstūris *ABCD*. Caur diagonāļu *AC* un *BD* viduspunktiem vilktas taisnes paralēli attiecīgi *BD* un *AC*; tās krustojas punktā *O*. Pierādīt, ka nogriežņi, kas savieno *O* ar *ABCD* malu viduspunktiem, sadala *ABCD* četrās daļās ar vienādiem laukumiem.

42.8. Skaitļu virkni veido šādi:
$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 1, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.
Noskaidrot, vai a_{1000} dalās ar 11.

42.9. Dots fiksēts leņķis ar virsotni *O*. Uz tā malām izvēlamies pa punktam *A* un *B* tā, ka $OA + OB = 1$. Pierādīt, ka visas ap šādi iegūtiem trijstūriem *AOB* apvilktās riņķa līnijas iet caur vienu fiksētu punktu, kas atšķiras no *O*.

42.10. Apskatām plaknē slēgtu lauztu līniju, kurai katri divi blakus posmi ir savstarpēji perpendikulāri un posmu garumi ir 1, 2, 3, … , *n* (tieši šādā secībā). Vai tāda lauzta līnija iespējama, ja

a) $n = 8$, b) $n = 13$, c) $n = 14$, d) . $n = 12$.

11.klase

42.11. Kuros skaitļu ass punktos funkcijai

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja } x \le 1 \\ x^3 - x + 1, & \text{ja } x > 1 \end{cases}$$

eksistē atvasinājums?

42.12. Pierādīt, ka eksistē izliekts sešstūris, kuru var sagriezt tieši 1992 vienādos trijstūros.

42.13. Telpā dotas 3 pa pāriem šķērsas taisnes. Pierādīt, ka var novilkt taisni, kas krusto tās visas.

42.14. Funkcijas $f(x)$ argumenti un vērtības ir naturāli skaitļi. Zināms, ka tā ir augoša, un $f(2) > 2$. Bez tam visiem naturāliem *m* un *n* pastāv vienādība $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$. Kāda ir mazākā iespējamā $f(2)$ vērtība.

42.15. Divas riņķa līnijas krustojas punktos *M* un *N*. Uz vienas riņķa līnijas loka, kas atrodas ārpus otras riņķa līnijas, izvēlas patvaļīgu punktu *A*; stari *AM* un *AN* krusto otru riņķa līniju vēl punktos *B* un *C*. Pierādīt, ka visi šādi iegūto trijstūru *ABC* apvilkto riņķa līniju centri atrodas uz vienas riņķa līnijas.

12. klase

42.16. Atrisināt vienādojumu

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 1.$$

42.17. Trapecē *ABCD* (pamati *AD* un *BC*) zināms, ka $AC = BC + AD$ un leņķis starp diagonālēm ir $60°$. Pierādīt, ka trapece ir vienādsānu.

42.18. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$(n+1)^k - 1 = n!.$$

42.19. Sfēra pieskaras visām trijstūra piramīdas šķautnēm. Pierādīt, ka tie trīs nogriežņi, kas savieno pieskaršanās punktus uz pretējām šķautnēm, krustojas vienā punktā.

42.20. Vagonā brauc 9 cilvēki. Katrs no tiem prot ne vairāk kā 3 valodas. Jebkuri divi no šiem cilvēkiem var saprasties vismaz vienā valodā. Pierādīt, ka var atrast tādus 5 cilvēkus, kas visi var saprasties vienā valodā.

PAPILDSACESĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

9. klase

42.21. Dots, ka *n* – naturāls skaitlis un $n+1$ dalās ar 24. Pierādīt, ka skaitļa *n* visu naturālo dalītāju summa arī dalās ar 24.

42.22. Vai var plaknē izvēlēties 17 taisnes tā, lai tām kopā būtu tieši 101 krustpunktu un nekādas 3 taisnes nekrustotos vienā punktā.

42.23. Dots, ka *x* un *y* – pozitīvi skaitļi un $x^2 + y^2 = 1$. Pierādīt, ka $x^3 + y^3 \geq \sqrt{2}xy$.

42.24. Paralelograma *ABCD* iekšpusē ņemts punkts *P*. Zināms, ka $\angle ABP = 2\angle ADP$ un $\angle DCP = 2\angle DAP$. Pierādīt, ka $AB = PB = PC$.

42.25. Kādā pilsētā dzīvo *n* pļāpas; katrai mājās ir telefons. Pļāpas vienlaicīgi uzzina katra vienu jaunumu (katra citu). Viņas sāk zvanīt viena otrai un apmainīties jaunumiem; turklāt katras sarunas laikā abas tās dalībnieces izstāsta viena otrai visus

sev zināmos jaunumus. Pļāpas grib organizēt sarunas tā, lai katra uzzinātu visus jaunumus, turklāt katru jaunumu katra pļāpa grib dzirdēt tikai vienreiz.
Vai tas iespējams, ja a) $n = 11$, b) $n = 12$?

10. klase

42.26. Izsakiet skaitli 1992 kā naturālu skaitļu summu tā, lai to reizinājums būtu vislielākais iespējamais.

42.27. Kādiem naturāliem n vienādojumam

$$x^n + (2+x)^n + (2-x)^n = 0$$

ir vesela sakne?

42.28. Vienādsānu trapecē ievilkts rombs; tā virsotnes pa vienai atrodas uz visām trapeces malām (ne trapeces virsotnēs). Pierādīt, ka romba virsotnes uz trapeces pamatiem un trapecei apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz vienas taisnes.

42.29. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 1918 ieskaitot var sadalīt 4 daļās tā, lai neviena daļa nesaturētu 10 locekļu aritmētisku progresiju?

42.30. Kādā pilsētā dzīvo n pļāpas; katrai mājās ir telefons. Pļāpas vienlaicīgi uzzina katra vienu jaunumu (katra citu). Viņas sāk zvanīt viena otrai un apmainīties jaunumiem; turklāt katras sarunas laikā abas tās dalībnieces izstāsta viena otrai visus sev zināmos jaunumus. Pļāpas grib organizēt sarunas tā, lai katra uzzinātu visus jaunumus, turklāt katru jaunumu katra pļāpa grib dzirdēt tikai vienreiz.
Vai tas iespējams, ja a) $n = 11$, b) $n = 6$?

11. klase

42.31. Riņķī ievilkts četrstūris. Tā diagonāļu krustpunkta projekcijas uz četrstūra malām ir *A*, *B*, *C*, *D*. Pierādīt, ka četrstūrī *ABCD* var ievilkt riņķa līniju.

42.32. Pierādīt, ka, lai kāds būtu naturāls skaitlis a, vienādojumam

$$(a^2 - 1)(x^2 - 1) = (y^2 - 1)$$

eksistē vismaz 2 atrisinājumi naturālos skaitļos.

42.33. Vai plakni var pārklāt ar septiņstūriem, kam visiem vienāds laukums un vienāds perimetrs, tā, lai katrā vietā, kur atrodas kāda septiņstūra virsotne, būtu vēl tieši divu citu septiņstūru virsotnes? Septiņstūri nedrīkst savā starpā pārklāties; plaknē nedrīkst palikt nenosegtas vietas.

42.34. Dots, ka $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ -- pozitīvi skaitļi un $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{100} = 1$. Pierādīt, ka

$$1 < \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_{100}} < 99.$$

42.35. Kādā pilsētā dzīvo *n* pļāpas; katrai mājās ir telefons. Pļāpas vienlaicīgi uzzina katra vienu jaunumu (katra citu). Viņas sāk zvanīt viena otrai un apmainīties jaunumiem; turklāt katras sarunas laikā abas tās dalībnieces izstāsta viena otrai visus sev zināmos jaunumus. Pļāpas grib organizēt sarunas tā, lai katra uzzinātu visus jaunumus, turklāt katru jaunumu katra pļāpa grib dzirdēt tikai vienreiz.

Vai tas iespējams, ja a) $n = 11$, b) $n = 6$?

12. klase

42.36. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu kvadrātu, kurus var iegūt, divas reizes pēc kārtas uzrakstot kādu naturālu skaitli.

42.37. Savienojot pēc kārtas izliekta piecstūra malu viduspunktus, iegūst jaunu izliektu piecstūri. Kādās robežās var mainīties iekšējā piecstūra laukuma attiecība pret ārējā piecstūra laukumu?

42.38. Naturālu skaitļu virknes (a_n) locekļi apmierina nosacījumus

$$a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ -\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \le \frac{1}{2},\ \text{ja}\ n \ge 2.$$

Pierādīt, ka visi locekļi, sākot ar otro, ir nepāra skaitļi.

42.39. Dots, ka $P(x)$ ir *n*-tās pakāpes polinoms, un tam ir *n* dažādas reālas saknes. Pierādīt, ka visiem *x* pastāv nevienādība

$$(P'(x))^2 \ge P(x) \cdot P''(x).$$

42.40. Kongresā sapulcējušies 101 zinātnieks: ķīmiķi un alķīmiķi. Ķīmiķi vienmēr runā taisnību, bet alķīmiķi dažreiz runā taisnību, dažreiz melo. Ķīmiķu starp kongresa dalībniekiem ir vairākums. Profesors Cipariņš grib par katru zinātnieku uzzināt, vai tas ir ķīmiķis vai alķīmiķis. Profesors drīkst katram dalībniekam jautāt par katru citu: “Kas viņš ir?” un saņemt atbildi.

Pierādiet, ka profesors Cipariņš var sasniegt savu mērķi, uzdodot ne vairāk kā 150 jautājumus. (Kongresa dalībnieki viens par otru zin “kurš ir kurš”).