44. Starptautiskā skolēnu matemātikas olimpiāde

Risināšanas laiks katru dienu 4 st. 30 min. Maksimālais punktu skaits: 7 punkti par katru uzdevumu.

1. diena

1. uzdevums. Pieņemsim, ka kopa A ir kopas $S = 1, 2, ..., 1000000$ apakškopa, kas satur tieši 101 elementus. Pierādīt, ka eksistē skaitļi t_1, t_2, $\ldots$, t_{100}, kas pieder kopai S ar īpašību, ka nevienām divām no kopām

$$A_j = \{a + t_j \mid a \in A\}, \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

nav kopīgu elementu.

2. uzdevums. Noteikt, kādiem pozitīvu veselu skaitļu pāriem (a, b)

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

ir pozitīvs vesels skaitlis.

3. uzdevums. Dots izliekts sešstūris, kurā katrām divām pretējām malām izpildās sekojoša īpašība: attālums starp to viduspunktiem ir vienāds ar $\frac{\sqrt{3}}{2}$ reizinājumu ar šo divu malu summu. Pierādīt, ka visi sešstūra leņķi ir vienādi. (Izliektam sešstūrim $ABCDEF$ ir trīs pretējo malu pāri: AB un DE, BC un EF, CD un FA.)

2. diena

4. uzdevums. Pieņemsim, ka $ABCD$ ir izliekts četrstūris, kura virsotnes atrodas uz vienas riņķa līnijas. Ar P apzīmējam perpendikula no punkta D uz taisni BC pamatu, ar Q apzīmējam perpendikula no punkta D uz taisni CA pamatu un ar R apzīmējam perpendikula no punkta D uz taisni AB pamatu. Pierādīt, ka $PQ = QR$ tad un tikai tad, ja leņķu $\sphericalangle ABC$ un $\sphericalangle ADC$ bisektrišu krustpunkts atrodas uz taisnes AC.

5. uzdevums. Pieņemsim, ka n ir pozitīvs vesels skaitlis un x_1, x_2, $\ldots$, x_n ir reāli skaitļi, kuriem izpildās $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

1) Pierādīt, ka

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

2) Pierādīt, ka nevienādības abas puses ir vienādas tad un tikai tad, ja virkne x_1, x_2, $\ldots$, x_n ir aritmētiska progresija.

6. uzdevums. Pieņemsim, ka p ir pirmskaitlis. Pierādīt, ka eksistē tāds pirmskaitlis q, ka, jebkuram naturālam skaitlim n, skaitlis $n^p - p$ nedalās ar q.