45. Starptautiskā skolēnu matemātikas olimpiāde

Risināšanas laiks katru dienu 4 st. 30 min. Maksimālais punktu skaits: 7 punkti par katru uzdevumu.

1. diena

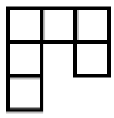
1. uzdevums. Pieņemsim, ka ABC ir šaurleņķu trijstūris, kuram $AB \neq AC$. Riņķa līnija ar diametru BC krusto malas AB un AC atbilstoši punktos M un N. Apzīmēsim malas BC viduspunktu ar O. Leņķu $\sphericalangle BAC$ un $\sphericalangle MON$ bisektrises krustojas punktā R. Pierādiet, ka trijstūru ΔBMR un ΔCNR apvilktajām riņķa līnijām ir kopīgs punkts, kas atrodas uz malas BC.

2. uzdevums. Noskaidrojiet, kuri polinomi $P(x)$ ar reāliem koeficientiem apmierina vienādību

$$P(a-b)+P(b-c)+p(c-a)=2P(a+b+c)$$

pie visiem tādiem reāliem skaitļiem a, b, c, ka $ab+bc+ca=0$.

3. uzdevums. Sauksim par āķi no sešiem vienības kvadrātiem izveidotu figūru, kas parādīta 1. attēlā, kā arī jebkuru figūru, kas no tās iegūstama ar pagriezienu un simetriju palīdzību.



1. att.

Noskaidrojiet, kurus taisnstūrus ar izmēriem $m \times n$ var pārklāt ar āķiem tā, ka

- taisnstūrī nav nepārklātu vietu un āķi savā starpā nepārklājas,
- neviena āķa daļa nepārklāj apgabalu ārpus taisnstūra.

2. diena

4. uzdevums. Pieņemsim, ka $n \geq 3$ ir vesels skaitlis. Pieņemsim, ka $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ir tādi pozitīvi reāli skaitļi, ka

$$n^2+1 > (t_1+t_2+\ldots+t_n) \cdot \left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right).$$

Pierādiet, ka visiem i, j, k, kur $1 \leq i < j < k \leq n$, skaitļi t_i, t_j, t_k ir kāda trijstūra malu garumi.

5. uzdevums. Izliektā četrstūrī $ABCD$ diagonāle BD nedala uz pusēm ne leņķi $\sphericalangle ABC$, ne leņķi $\sphericalangle CDA$. Punkts P atrodas $ABCD$ iekšpusē un apmierina sakarības

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA \text{ un } \sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA.$$

Pierādiet, ka ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja $AP = CP$.

6. uzdevums. Pozitīvu veselu skaitli sauksim par *alternējošu*, ja tā decimālajā pierakstā no katriem diviem blakus uzrakstītiem cipariem viens ir pāra cipars, bet otrs – nepāra cipars.

Noskaidrojiet, kuriem pozitīviem veseliem skaitļiem n piemīt īpašība: eksistē skaitļa n daudzkārtnis, kurš ir alternējošs.