Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 46. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

9. klase

46.1. Uz katras no 3 kartiņām uzrakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 10 (starp tiem var būt arī vienādi). Kartiņas izdalīja pa vienai katram no 3 cilvēkiem, savāca un izdalīja atkal, utt. Pēc vairākām izdalīšanām šie 3 cilvēki konstatēja, ka viņu saņemto skaitļu summas ir attiecīgi 13; 15; 23. Kādi skaitļi bija uzrakstīti uz kartiņām ?

46.2. Riņķa līnijā ievilktam četrstūrim katra diagonāle vienu leņķi sadala divās vienādās daļās, bet otru – daļās, kuru lielumu attiecība ir 1:2. Aprēķināt četrstūra leņķus.

46.3. Uz trijstūra ABC malām BC, AC, AB ņemti attiecīgi punkti D, E, F, kas atšķiras no virsotnēm. Nogriežņi AD, BE, CF ir vienādi un krustojas vienā punktā O. Pierādīt, ka

$OA + OB + OC = 2\cdot(OD + OE + OF)$.

46.4. Trīs spēlētāji spēlē novusu. Katras partijas zaudētājs noiet malā, dodot vietu tam, kas vērojis iepriekšējo spēli; uzvarētājs paliek pie galda. Pirmais spēlētājs nospēlēja 5 partijas, otrais – 11 partijas. Cik partijas nospēlēja trešais spēlētājs ?

46.5. Tenisa turnīrā piedalījās 10 spēlētāji. Katrs ar katru spēlēja vienu reizi; neizšķirtu nav. Apzīmēsim spēlētāju uzvaru un zaudējumu skaitus attiecīgi ar x_i un y_i , $i = 1; 2; ...; 10$. Pierādīt, ka

$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2$

10. klase

46.6. Katram no kvadrātvienādojumiem $ax^2+2bx+a=0$, $cx^2+2ax+c=0$ un $bx^2+2cx+b=0$ ir saknes. Kādas skaitliskas vērtības var pieņemt šīs saknes ?

46.7. Dots, ka ABC ir platleņķa trijstūris; $\angle A > 90°$. Punkti I un O ir ΔABC ievilktā un apvilktā riņķa centri. Zināms, ka trijstūru IBC un OBC laukumi ir vienādi. Pierādīt, ka IAB un IOC laukumu summa vienāda ar ICA un IBO laukumu summu.

46.8. Vai var rindā izrakstīt 1996 dažādus skaitļus, kas vienlaikus apmierina šādas divas īpašības:

a) katrs no tiem ir kādam naturālam skaitlim apgriezts skaitlis,

b) otrais skaitlis atšķiras no pirmā par tikpat, par cik trešais no otrā, par cik ceturtais no trešā, ..., par cik 1996-ais no 1995-ā ?

46.9. Skaitli n sauc par labu, ja to var izsacīt kā $n = x^2 + 2y^2$, kur x un y – kaut kādi veseli skaitļi. Pierādīt : ja n ir vesels skaitlis un $3n$ ir labs skaitlis, tad n arī ir labs skaitlis.

46.10. Trīs spēlētāji spēlē novusu. Katras partijas zaudētājs noiet malā, dodot vietu tam, kas vērojis iepriekšējo partiju; uzvarētājs paliek pie galda. Pirmais spēlētājs uzvarēja sešās partijās, otrais – astoņās, trešais – desmit.

Cik partijas izspēlēja katrs spēlētājs ?

11. klase

46.11. Dots, ka $x^4 + y^4 = x^3y + xy^3$. Pierādīt, ka $x=y$.

46.12. Četrstūrī $ABCD$ ievilktā riņķa centrs ir S; ap $ABCD$ var arī apvilkt riņķa līniju. Taisne, kas vilkta caur S paralēli AB, krusto AD un BC atbilstoši punktos M un N. Pierādīt, ka $ABCD$ perimetrs vienāds ar $4 \cdot MN$.

46.13. Pierādīt, ka ne triju, ne četru, ne piecu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu kvadrātu summa nav kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

46.14. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 7 ir īstas (visas ar vienādu masu), bet 2 viltotas (arī ar vienādu, bet citādu masu). Kā ar 3 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noteikt, vai viltotās monētas vieglākas vai smagākas par īstajām ?

46.15. Dots, ka $x_0=1$ un $x_{n+1} = \dfrac{2x_n + \sqrt{x_n^2 + 2}}{3}$, $n = 0; 1; 2; \ldots$.

Pierādīt, ka $x_{1996} < 37$.

12. klase

46.16. Dots, ka skaitļi $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+d}{2}$, $\frac{d+e}{2}$, $\frac{e+a}{2}$ ir tie paši skaitļi *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, tikai varbūt citā secībā. Pierādīt, ka $a = b = c = d = e$.

46.17. Dots, ka *x* un *y* – naturāli skaitļi, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1, un $x^{1996} + y^{1996}$ dalās ar $x + y$. Atrast *x* un *y*.

46.18. Četrstūris ievilkts riņķa līnijā. No katras malas viduspunkta novilkts perpendikuls pret pretējo malu.
Pierādīt, ka šie 4 perpendikuli krustojas vienā punktā.

46.19.. Kādā valstī ir *n* pilsētas un vismaz $2n$-1 vienvirziena ceļi. Ceļu krustojumu ārpus pilsētām nav (izmantoti viadukti). Zināms, ka no katras pilsētas var aizbraukt uz katru citu, braucot pa vienu vai vairākiem ceļiem saskaņā ar kustības virzieniem. Pierādīt, ka vienu no ceļiem var slēgt tā, lai joprojām no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru citu.

46.20. Funkcija $f(t)$ definēta visiem reāliem t, un zināms, ka vienādība
$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$ ir identitāte.
Pierādīt, ka arī vienādība $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ir identitāte.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

46.21. Apskatām kopu $X_n=\{1; 2; ... ; n\}$, $n \geq 3$. Par tās apakškopas *K* svaru $S(K)$ sauksim *K* visu elementu summu; tukšās kopas svars ir 0. Apakškopu *K* sauc par pāra resp. nepāra apakškopu, ja tās svars ir pāra resp. nepāra skaitlis.
a) pierādīt, ka pāra apakškopu ir tikpat, cik nepāra,
b) pierādīt, ka pāra apakškopu svaru summa vienāda ar nepāra apakškopu svaru summu,
c) aprēķināt visu pāra apakškopu svaru summu.

46.22. Riņķa līnijā ievilkts izliekts sešstūris *ABCDEF*. Pierādīt, ka diagonāles *AD*, *BE*, *CF* krustojas vienā punktā tad un tikai tad, kad $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

46.23. Atrast visus tādus pirmskaitļus p, ka $p\cdot(2^{p-1}-1)$ ir naturāla skaitļa pakāpe, augstāka par pirmo, un pierādīt, ka citu bez atrastajiem nav.

46.24. Katra kuba skaldne sadalīta $n\times n$ vienādos kvadrātiņos. Pa kuba virsmu novilkta slēgta lauzta līnija, kas iet pa kvadrātiņu malām un katra kvadrātiņa katrā virsotnē ieiet tieši vienu reizi.

Pierādīt, ka to daļu laukumi, kurās tā sadala kuba virsmu, ir vienādi. Pierādīt, ka nekādi trīs no tiem neveido ģeometrisku progresiju.

46.25.. Apskatām skaitļus 3^n-2^n, $n=1; 2; 3; \ldots$.