Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 47. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

47.1. Izteiksmi var pārveidot formā $(ay-bx)^2$, tātad tās vērtība nevar būt negatīva.

47.2. Doto sešciparu skaitli var pārrakstīt sekojoši:

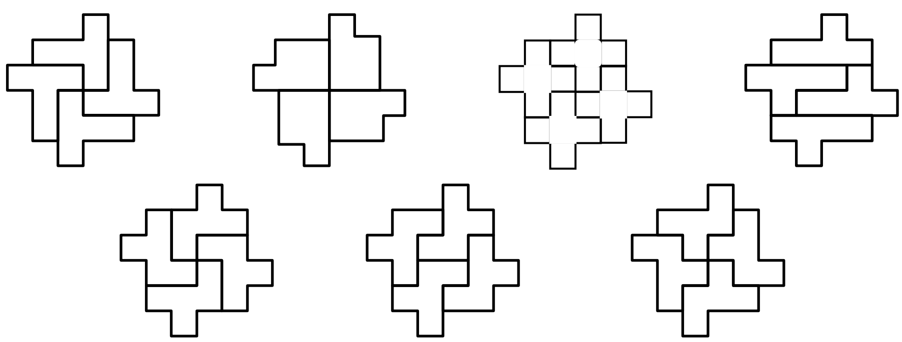
$$\overline{ababab}=\overline{ab}\cdot 10101=\overline{ab}\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37\,.$$

No sadalījuma reizinātājos skaidri redzams, ka $\overline{ababab}$ nevar dalīties ar pirmskaitļiem, kam ir vairāk nekā divi cipari; tātad mums jāaplūko tikai pirmskaitļi, kuri mazāki par 100.

Lai divciparu skaitlis dalītos ar 11, tā abiem cipariem ir jābūt vienādiem. Pēc uzdevuma nosacījumiem a un b ir dažādi, tātad $\overline{ab}$ ar 11 nedalās. Neviens cits no reizinātājiem arī ar 11 nedalās; tātad $\overline{ababab}$ ar 11 nedalās.

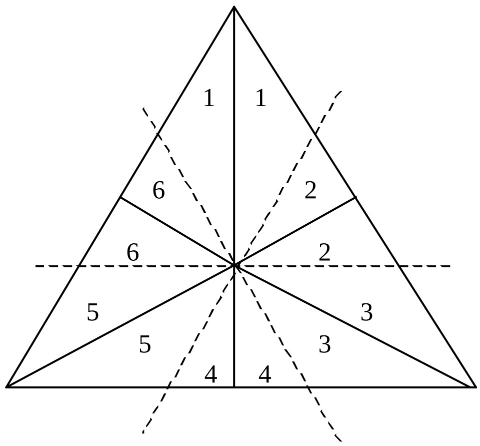
Atbilde: $\overline{ababab}$ var dalīties ar visiem pirmskaitļiem, kuri mazāki par 100, izņemot 11.

47.3. Atrisinājums parādīts 47.1. zīmējumā.



47.2. zīm.

47.4. Caur doto punktu (Apzīmēsim to ar O) novelkam taisnes, kuras paralēlas trijstūra malām (sk. 47.3. zīm.). Rezultātā iegūstam, ka trijstūris sadalīts 12 mazākos, kuru viena no virsotnēm ir O.



47.3. zīm.

Pierāda, ka ar vienādiem cipariem apzīmētie trijstūri ir vienādi; no šejienes seko prasītais.

47.5. Vispirms apskatīsim, vai nepietiek ar divām pārbaudēm.

Pieņemsim, ka divos mēģinājumos kopā pārbaudītas mazāk par 6 monētas. Gadījumā, ja neviena no pārbaudēm neuzrāda atšķirīgās monētas klātbūtni, tad palikušas vismaz divas nepārbaudītas monētas, starp kurām noteikti ir arī atšķirīgā, bet nav zināms, kura tieši.

Tagad pieņemsim, ka divi mēģinājumi kopā aptvēruši maksimālo skaitu – sešas monētas (katrā reizē – trīs citas monētas). Bet tad, gadījumā, ja vienā no pārbaudēm uzrādīta atšķirīgās monētas eksistence, nav skaidrs, kura no trijām "aizdomīgajām" tā ir. Tātad ar divām pārbaudēm nepietiek.

Pierādīsim, ka ar trim pārbaudēm pietiek. Parādīsim, kā šīs pārbaudes jāveic.

Apzīmēsim 7 monētas ar *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* un *G*.

Vispirms pārbaudām monētas *A*, *B* un *C*.

1) Ja starp tām ir atšķirīgā, tad pārbaudām trijniekus (A, E, F) un (B, E, F); ja kādā no tiem ir atšķirīgā monēta, tad tā ir *A* -- pirmajā gadījumā vai *B* – otrajā gadījumā; ja šajos trijniekos nav atšķirīgās monētas, tad atšķirīgā ir *C*.
2) Ja starp tām nav atšķirīgās, tad pārbaudām trijnieku (A, E, F), tādejādi noskaidrojot, vai atšķirīgā monēta ir starp monētām *E*, *F*, vai starp atlikušajām *G*, *H*. Pēdējā pārbaudē, ņemot divas īstas un vienu aizdomīgu monētu, noskaidrojam, kura no divām aizdomīgajām monētām ir atšķirīgā.

47.6. No Vjeta teorēmas seko, ka vienādojumam $x^2 + px + q = 0$ sakņu kvadrātu summa ir izsakāma šādi:

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$

Izmantojot iegūto vienādību, izsacīsim sakņu kvadrātu summu uzdevumā minētajiem vienādojumiem:

Pirmajam vienādojumam tā ir $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2\cdot(3a-1) = a^2 - 6a + 2$,

bet otrajam vienādojumam tā ir $a^2 - 6a - 1$.

Viegli ievērot, ka, neatkarīgi no a vērtības, sakņu kvadrātu summas minētajiem vienādojumiem atšķiras par 3 , kas arī bija jāpierāda.

47.7. a) Ja viens no diviem dažādajiem naturālajiem skaitļiem, piem., $x = 1$, tad skaidrs, ka $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1} + \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{y} > 1$. Tādējādi jāaplūko tikai gadījums, kad $x > 1$ un $y > 1$. Bet tādā gadījumā $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$.

b) Savukārt kā trīs dažādu naturālu skaitļu apgriezto lielumu summu skaitli 1 izteikt var: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

c) Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka to var izdarīt jebkuram $n \geq 1$.

Bāze: $n = 3$;

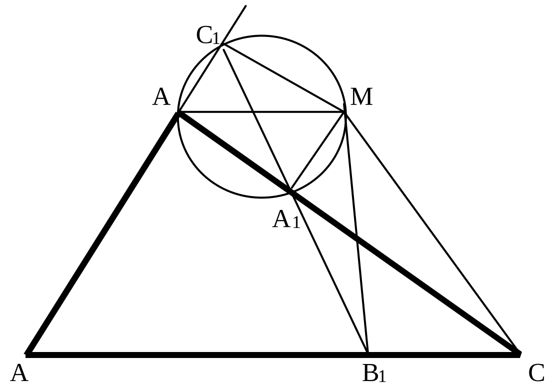
Induktīvā pāreja: ja

$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$ un $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, tad,

izmantojot vienādību $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$, iegūstam prasīto vienādību $n+1$ skaitļiem

$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n + 1} + \frac{1}{x_n(x_n + 1)}$.

47.8. Aplūkosim 47.4. zīmējumu.



47.4. zīm.

Ap četrstūri A_1BC_1M var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle C_1 + \angle A_1 = 180°$; tātad varam apzīmēt $\angle C_1MB = \angle C_1A_1B = \alpha$, jo abi tie ir vienā riņķa līnijā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu loku BC_1.

Var apvilkt riņķa līniju arī ap četrstūri MA_1B_1C; tāpēc $\angle B_1MC = \angle B_1A_1C = \alpha$. No šejienes $\angle BMC = \angle C_1MB_1 = 180° - \alpha$, un prasītais pierādīts.

47.9. a) Divi atrisinājumi ir šādi $x = 2;\ y = 2$; $x = 2{,}5;\ y = 3{,}5$.

b) Apzīmējam

$$[x] = a, \quad x = a + \alpha, \quad 0 \le \alpha < 1$$
$$[y] = b, \quad y = b + \beta, \quad 0 \le \beta < 1 .$$

Pārrakstīsim doto, izmantojot ieviestos apzīmējumus:

$$ab = a + b + (\alpha + \beta).$$

Tā kā a un b – veseli skaitļi, tad arī $\alpha + \beta$ jābūt veselam skaitlim.

Tā kā $0 \le \alpha < 1$ un $0 \le \beta < 1$, tad $\alpha + \beta = 0$ vai $\alpha + \beta = 1$.

1) Ja $\alpha + \beta = 0$, tad $\alpha = \beta = 0$ un iegūstam

$b = 1 + \dfrac{1}{a-1}$; no šejienes $x = y = 2$.

2) Ja $\alpha + \beta = 1$, tad $ab = a + b + 1$; no kurienes

$b = 1 + \dfrac{2}{a-1}$. Tāpēc $[x] = a = 2$ un $[y] = b = 3$, vai $[x] = a = 3$ un $[y] = b = 2$.

Varam pārbaudīt, ka visi šādi atrisinājumu pāri der.

47.10. Visus apskatāmos $3n+1$ skaitļus pierakstām formā $2^k m$, kur m – nepāra skaitlis. Ja atradīsies trīs skaitļi, kuriem m ir vienāds, tie derēs par meklējamiem.

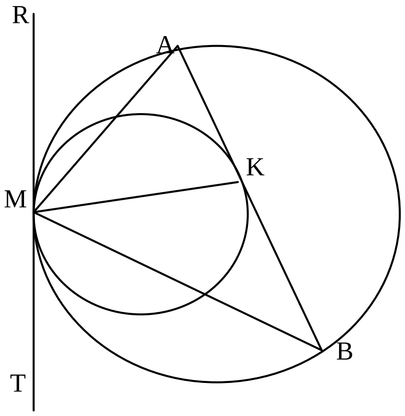
Katrs nepāra skaitlis, kas lielāks par $2n$, var būt tikai vienu reizi sastopams starp skaitļiem m; tādu skaitļu pavisam ir n. Tātad vismaz $2n+1$ no apskatāmajiem skaitļiem satur kā reizinātāju m kādu no skaitļiem $1,3,5,\ldots,2n-1$. Izmantojot Dirihlē principu, no šejienes seko prasītais.

47.11. a) Patvaļīgu divciparu skaitli pierakstīsim kā $\overline{ab}=10a+b$; no šejienes $\overline{ab}=10a+b\geq 10a>b\cdot a$.

b) Prasītais seko no nevienādībām
$\overline{a_0a_1\ldots a_{n-1}}\geq \overline{a_0 00\ldots 0}=a_0\cdot 10^{n-1}>a_0a_1\cdot\cdots\cdot a_{n-1}$.

47.12. Ievērosim, ka $|x-y|\equiv x+y \pmod 2$. No šejienes iegūstam
$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|\equiv(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)=$
$2(a+b+c+d)\equiv 0 \pmod 2$.

47.13. Vispirms novelk riņķa līniju kopējo pieskari punktā M, uz tās atliek punktu R (skat. 47.5. zīm.).



47.5. zīm.

No hordas - pieskares leņķu īpašībām iegūstam
$\angle AMK=\angle RMK-\angle RMA=\angle AKM-\angle ABM=\angle KMB$,
kas arī bija jāpierāda.

47.14. Ja $x=0$, tad izteiksmes x^2y-y^2x vērtība ir 0. Ja $x\neq 0$, tad doto izteiksmi pārveidojam sekojoši:

$$x^2y-y^2x=x^3\left(\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=x^3\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{x}\right)^2\right]\leq 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Vērtība $\frac{1}{4}$ tiek sasniegta, ja $x=1$ un $y=\frac{1}{2}$.

47.15. Nē, tā gadīties nevar. Pieņemsim, ka posmā starp sākotnējiem punktiem A un B sienāzis nekad nenonāk. Tad brīdi pa brīdim notiek sienāža lēcieni pāri sarkano punktu pārim (A,B). Pieņemsim, ka sarkano punktu daudzums pirms viena šāda lēciena ir x; tieši pirms nākošā lēciena pār (A,B) sarkano punktu daudzums ir $\frac{3}{2}\cdot x$, tieši pirms nākošā lēciena pār (A,B) sarkano punktu daudzums ir $\left(\frac{3}{2}\right)^2 x$, utt. Bet visi skaitļi $\left(\frac{3}{2}\right)^k x$ nevar būt veseli.

47.16. Tā kā $\sin x$ un $\cos x$ vienlaicīgi nav nulles, tad

$$\sin^2 x + \cos^4 x > 0.$$

Tā kā $|\cos x| \le 1$, tad $\cos^4 x \le \cos^2 x$. No šejienes seko, ka

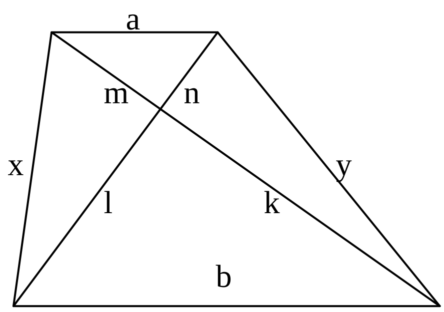
$$\sin^2 x + \cos^4 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

47.17. Uzrakstīsim skaitļu virkni $2^n + 1$ pēc moduļa 5:

3, 0, 4, 2, 3, 0, 4, 2, … .

Tā ir periodiska ar perioda garumu 4. Redzam, ka skaitlis $2^n + 1$ dalās ar 5 tad un tikai tad, ja $n = 4k + 2$.

47.18. Nogriežņu garumus apzīmēsim kā parādīts 47.6. zīmējumā.



47.6 zīm.

a) No Pitagora teorēmas iegūstam:

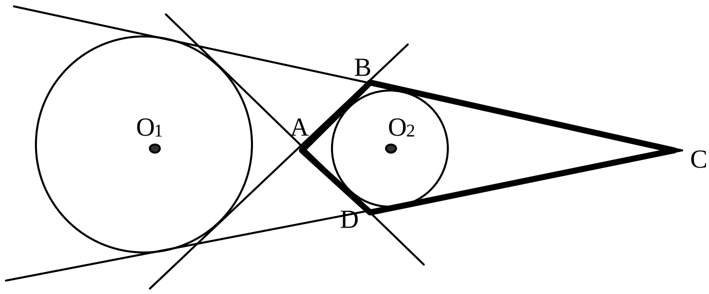
$$x^2 + y^2 = (m^2 + l^2) + (n^2 + k^2) = (m^2 + n^2) + (l^2 + k^2) = a^2 + b^2 .$$

b) Izpildot identiskus pārveidojumus, iegūstam:

$$x^2 y^2 - a^2 b^2 = (m^2 + l^2)(n^2 + k^2) - (m^2 + n^2)(l^2 + k^2) =$$
$$m^2 n^2 + m^2 k^2 + l^2 n^2 + l^2 k^2 - m^2 l^2 - m^2 k^2 - l^2 n^2 - n^2 k^2 =$$
$$m^2 n^2 + l^2 k^2 - m^2 l^2 - n^2 k^2 =$$
$$(m^2 - k^2)\cdot(n^2 - l^2).$$

Trijstūri pie trapeces paralēlajām malām ir līdzīgi, tāpēc vai nu $m > k$ un $n > l$, vai arī $m < k$ un $n < l$. Abos gadījumos $\left(m^2 - k^2\right)\cdot\left(n^2 - l^2\right) > 0$. Tātad $x^2 y^2 > a^2 b^2$, un $xy > ab$.

49.19. Nē, taisne *MK* var nebūt perpendikulāra pamata plaknei. Aplūkosim pamata plakni (skat. 47.7 zīm.).



47.7. zīm.

Ja *M* projicējas punktā O_1, bet *K* projicējas punktā O_2, tad <u>katrā piramīdā *atsevišķi*</u> minētie sānu skaldņu augstumi ir vienādi savā starpā. Variējot *M* un *K* attālumus no plaknes *ABCD*, viegli panākt visu astoņu augstumu vienādību.

49.20. Piešķirsim rūķīšiem numurus no 1 līdz 10 pēc kārtas; Numuru 1 piešķirsim rūķītim, kam sākumā ir visi 10 zelta gabali. Aplūkosim sekojošu summu:

$$S = 1\cdot n_1 + 2\cdot n_2 + \cdots + 10\cdot n_{10},$$

kur n_i ir zelta gabalu skaits, kas kādā momentā ir *i*-tajam rūķītim.

Sākumā $S = 10$; lai spēle beigtos, jābūt $S = 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$. Katrā gājienā summa pēc moduļa 10 nemainās. Tātad no sākotnējās situācijas nav iespējams iegūt beigu situāciju.

49.21. Varam pieņemt, ka $a > b$. Apzīmēsim $a - b = d$. Ņemot $n = k\cdot d + 1 - a,\ \ k = 1, 2, 3, \ldots$, iegūstam prasīto. Tiešām $(a+n, b+n) = (a+n, (b+n)-(a+n)) = (a+n, d) = (kd+1, d) = (1, d) = 1$.

49.22. Nē, tādas funkcijas nav. No pirmās sakarības iegūstam

$$f\left(f(1 + f(x))\right) = f(1-x);$$

lietojot otro sakarību, iegūstam

$$1 + f(x) = f(1-x).$$

Ievietojot $x = 0$ un $x = 1$, iegūstam

$$1+f(0)=f(1) \quad \text{un} \quad 1+f(1)=f(0).$$

Šīs vienādības ir pretrunīgas.

47.23. Pavisam 9 punktus savieno 36 nogriežņi. Pierādīsim, ka meklējamais minimums ir 33.

1) Pieņemsim, ka novilkti 33 nogriežņi. Tad ir 3 nogriežņi, kas nav novilkti. Aplūkojam tādus 3 punktus *A*, *B*, *C*, ka katram nenovilktajam nogrieznim vismaz viens galapunkts ir *A*, *B* vai *C*. Tad visi nogriežņi, kas savieno atlikušos 6 punktus ir novilkti. Tas, ka starp tiem atradīsies vienkrāsains trijstūris ir vispārzināms fakts.

2) Piemēru ar 32 šķautnēm veido induktīvi, izejot no piecstūra, kura malas nokrāsotas melnas, bet diagonāles baltas; šādā grafā nav vienkrāsainu trijstūru.

Tālāk izvēlamies vienu virsotni *A* un savienojam jaunu virsotni *B* ar visām grafa virsotnēm, izņemot *A*. Šķautni *BX* nokrāsojam tāpat, kā nokrāsota *AX*. Viegli pārbaudīt, ka arī jaunajā grafā nav vienkrāsainu trijstūru. Pievienojot virsotni, katru reizi nenovelkam tieši vienu šķautni. Četras reizes atkārtojot šo operāciju, iegūstam prasīto grafu ar 9 virsotnēm un 32 šķautnēm.

47.24. Nevienādību pierāda ar matemātisko indukciju.

Ja $n=1$, tā pārveidojas par nevienādību

$$\frac{1}{a+b}<\frac{1}{\sqrt{a(a+b)}} \quad \Leftrightarrow \quad a^2+ab<a^2+2ab+b^2,$$

kas ir acīmredzama.

Pieņemsim, ka nevienādība ir pareiza visiem $n<k$; pierādīsim to pe $n=k$.

1) $k=2t$. Tad saskaņā ar induktīvo pieņēmumu

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+tb}<\frac{t}{\sqrt{a(a+tb)}} \quad \text{un}$$

$$\frac{1}{(a+tb)+b}+\frac{1}{(a+tb)+2b}+\cdots+\frac{1}{(a+tb)+tb}<\frac{t}{\sqrt{(a+tb)(a+2tb)}}.$$

Mums jāpierāda, ka

$$\frac{t}{\sqrt{a(a+tb)}}+\frac{t}{\sqrt{(a+tb)(a+2tb)}}<\frac{2t}{\sqrt{a(a+2tb)}}.$$

Tā reducējas par nevienādību

$$\sqrt{a+2tb}+\sqrt{a}<2\sqrt{a+tb} \quad \Leftrightarrow$$

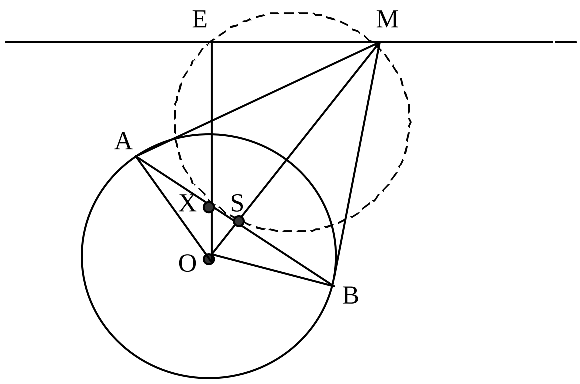
$$2a+2tb+2\sqrt{a(a+2tb)}<4a+4tb \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{a(a+2tb)}<a+tb \quad \Leftrightarrow$$

$$0<t^2b^2\ ,$$

kas vienmēr izpildās. Nevienādība pierādīta.

47.25. Aplūkosim 47.8. zīmējumu.



47.8. zīm.

Skaidrs, ka $AB \perp OM$. Četrstūra $SXEM$ pretējo leņķu summa ir $180°$, tātad ap to var apvilkt riņķa līniju; tāpēc $OX \cdot OE = OS \cdot OM$.

No līdzīgiem taisnleņķa trijstūriem OSA un OAM iegūstam

$$\frac{OS}{OA} = \frac{OA}{OM} \quad \Rightarrow \quad OS \cdot OM = OA^2.$$

Tātad $OX = \dfrac{OA^2}{OE}$ ir konstants lielums.