Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 47. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

9. klase

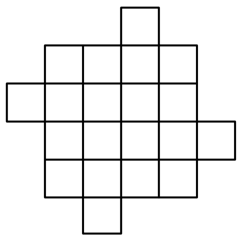
47.1. Pierādīt, ka izteiksmes

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(ax+by\right)^2$$

vērtība nevar būt negatīva.

47.2. Ar kādiem pirmskaitļiem var dalīties sešciparu skaitlis $\overline{ababab}$, ja a un b – dažādi cipari ($a \neq 0$) ?

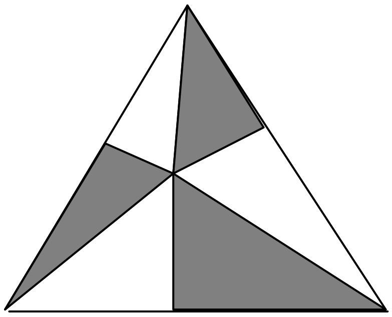
47.3. Pierādiet, ka 47.1.zīm. redzamo figūru, kas sastāv no vienādām kvadrātiskām rūtiņām, var sadalīt 4 vienādos daudzstūros tā, ka dalījuma līnijas iet pa rūtiņu malām.



47.1. zīm.

Centieties atrast vismaz 7 dažādus sadalījumus, kas viens no otra nav iegūstami ar pagriešanu .

47.4. Vienādmalu trijstūra iekšpusē ņemts punkts un savienots ar visām virsotnēm. Bez tam no šī punkta novilkti perpendikuli pret visām trijstūra malām (skat. 47.2. zīm.).



47.1. zīm.

Pierādīt, ka iesvītroto un neiesvītroto trijstūru laukumu summas ir vienādas.

47.5. Dotas 7 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Sešām no tām ir vienādas masas; septītās monētas masa atšķiras. Mūsu rīcībā ir ierīce, ar kuras palīdzību var vienlaikus pārbaudīt jebkuras 3 monētas un uzzināt, vai starp tām ir atšķirīgā monēta. Ar kādu mazāko pārbaužu skaitu var garantēti atrast atšķirīgo monētu ?

10. klase

47.6. Pierādiet: lai kāds arī būtu skaitlis a, vienādojumiem

$$x^2 + ax + (3a-1) = 0 \text{ un } x^2 + (a-1)x + (2a+1) = 0$$

sakņu kvadrātu summas atšķiras viena no otras.

47.7. Vai skaitli 1 var izteikt kā a) divu, b) triju, c) 1997 dažādu naturālu skaitļu apgriezto lielumu summu ?

47.8. Ārpus trijstūra ABC atrodas punkts M. No tā novilkti perpendikuli MC_1 pret taisni AB, MA_1 pret taisni, MB_1 pret taisni. Punkts C_1 atrodas uz malas AB pagarinājuma; A_1 un B_1 ir attiecīgi malu BC un AC iekšējie punkti. Dots, ka A_1 , B_1 un C_1 atrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka M pieder riņķa līnijai, kas apvilkta ap trijstūri ABC.

47.9. Ar $[a]$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz a.

a) atrast divus vienādojuma

$$[x] \cdot [y] = x + y$$

atrisinājumus pozitīvos skaitļos;

b) atrisināt šo vienādojumu pozitīvos skaitļos.

47.10. Pieņemsim, ka n ir kaut kāds naturāls skaitlis. Doti patvaļīgi $3n+1$ naturāli skaitļi, no kuriem neviens nepārsniedz $4n$. Pierādīt: no šiem skaitļiem var izvēlēties 3 dažādus skaitļus un apzīmēt tos ar a, b un c tā, ka a dalās ar b, bet b dalās ar c.

11. klase

47.11. a) Pierādīt, ka naturāls divciparu skaitlis ir lielāks par savu ciparu reizinājumu,
b) pierādīt, ka naturāls n-ciparu skaitlis ir lielāks par savu ciparu reizinājumu, ja $n \geq 2$.

47.12. Dots, ka a, b, c, d – veseli skaitļi. Pierādīt, ka
$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|$ ir pāra skaitlis.

47.13. Divas riņķa līnijas iekšēji pieskaras punktā M. Lielākās riņķa līnijas horda AB pieskaras mazākajai riņķa līnijai punktā K. Pierādīt, ka MK ir leņķa AMB bisektrise.

47.14. Dots, ka $0 \leq x \leq 1$ un $0 \leq y \leq 1$. Atrast izteiksmes
$x^2 y - y^2 x$ lielāko iespējamo vērtību.

47.15. Uz riņķa līnijas sākotnēji atzīmēti n sarkani punkti, $n \geq 3$. Sienāzis, kas sākumā atrodas vienā no šiem punktiem, lec pa riņķa līniju pulksteņa rādītāja kustības virzienā, ar katru lēcienu pārlecot pāri diviem jau atzīmētiem sarkaniem punktiem un piezemējoties pirms nākošā sarkanā punkta. Katrā sienāža piezemēšanās vietā tiek atzīmēts jauns sarkans punkts. Šis process turpinās neierobežoti ilgi.
Vai var gadīties, ka sienāzis nekad nenonāk kādā riņķa līnijas lokā, kura galapunkti ir divi sākotnēji blakus atzīmēti sarkanie punkti ?

12. klase

47.16. Pierādīt, ka visiem x pastāv nevienādība
$0 < \sin^2 x + \cos^4 x \leq 1$

47.17. a) atrodiet trīs mazākos naturālos n, kuriem $2^n + 1$ dalās ar 5,
b) kādiem naturāliem n skaitlis $2^n + 1$ dalās ar 5 ?

47.18. Trapeces diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras.
a) Pierādiet, ka sānu malu garumu kvadrātu summa vienāda ar pamatu garumu kvadrātu summu.

b) pierādiet, ka sānu malu garumu reizinājums lielāks par pamatu garumu reizinājumu.

47.19. Divām četrstūra piramīdām *MABCD* un *KABCD* pamati *ABCD* sakrīt, bet virsotnes *M* un *K* nesakrīt. Augstumi, kas *MABCD* sānu skaldnēs novilkti no virsotnes *M*, un augstumi, kas *KABCD* sānu skaldnēs novilkti no virsotnes K, visi astoņi ir vienāda garuma.
Vai taisne *MK* noteikti perpendikulāra plaknei *ABCD* ?

47.20. Ap apaļu galdu sēž un spēlējas 10 rūķīši. Spēles sākumā vienam no tiem ir 10 zelta gabali. Ik pēc minūtes rūķīši noskaidro, vai kādam no viņiem ir vairāk nekā viens zelta gabals. Ja tādi rūķīši ir, tad tieši viens no viņiem iedod pa vienam zelta gabalam abiem saviem kaimiņiem. Spēle beidzas, ja nevienam rūķītim nav vairāk par vienu zelta gabalu.
Pierādīt, ka spēle nekad nebeigsies, lai kā arī rūķīši censtos to pabeigt.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

47.21. Dots, ka a un b – dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu n, ka $a+n$ un $b+n$ lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

47.22. Vai eksistē funkcija $f(x)$, kas definēta visiem reāliem skaitļiem un kas katram x apmierina sakarības

$$f(1+f(x)) = 1-x \text{ un}$$
$$f(f(x)) = x.$$

47.23. Telpā doti 9 punkti; nekādi 4 no tiem neatrodas vienā plaknē. Atrast mazāko naturālo n ar īpašību: lai kādus n nogriežņus, kam abi galapunkti ir divi no šiem 9 punktiem, mēs novilktu, un lai kā izkrāsotu dažus nogriežņus baltus, bet pārējos – melnus, noteikti atradīsies trijstūris, kuram visas malas ir vienā krāsā.

47.24. Dots, ka a un b – pozitīvi skaitļi, n – naturāls skaitlis. Pierādīt nevienādību

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}+\ldots+\frac{1}{a+n\cdot b}<\frac{n}{\sqrt{a(a+n\cdot b)}}$$

47.25. Taisnei t nav kopīgu punktu ar riņķa līniju ω, kuras centrs ir O. Uz t atrasts punkts E tā, ka $OE \perp t$; uz t izvēlēts arī vēl cits punkts M. Pieskares, kas no M novilktas riņķa līnijai ω, pieskaras tai punktos A un B; AB krusto OE punktā X.
Pierādīt, ka punkts X nav atkarīgs no M izvēles.