Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 49. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

49.1. Vienādojumu pakāpeniski pārveidojam par

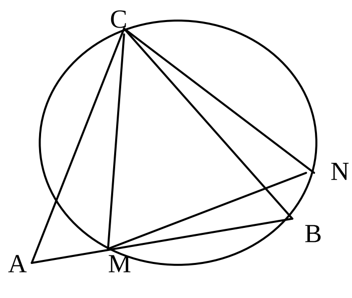
$$\frac{x(x+b)+(x-a)(x+b)+x(x-a)}{(x-a)x(x+b)}=0$$

Vienādojumam $3x^2+2(b-a)x-ab=0$ ir divas saknes, jo tā brīvais loceklis ir negatīvs, tātad $D=(b-a)^2+3ab>0$. Pēc Vjeta teorēmas $x_1x_2=-\frac{ab}{3}<0$, tāpēc viena no vienādojuma $3x^2+2(b-a)x-ab=0$ saknēm ir negatīva, otra ir pozitīva. Vēl jāpārbauda, vai x_1 vai x_2 nevar būt 0, *a* vai (-*b*):

$$3\cdot 0^2+2(b-a)\cdot 0-ab=-ab\neq 0$$
$$3a^2+2(b-a)\cdot a-ab=a^2+ab>0$$
$$3(-b)^2+2(b-a)\cdot(-b)-ab=b^2+ab>0.$$

Tātad arī sākotnējam vienādojumam ir viena pozitīva un viena negatīva sakne.

49.2. Tā kā $\angle CBM=\angle CNM=60°$, tad ap četrstūri *MCNB* var apvilkt riņķa līniju. Tad $\angle CBN$ un $\angle CMN$ balstās uz vienu loku, tāpēc $\angle CBN=\angle CMN=60°$. Tāpēc $\angle MBN=60°+60°=120°$ un $\angle CAB+\angle NBA=60°+120°=180°$, no kurienes seko vajadzīgais.



49.1. zīm.

49.3. Atbilde: $n=4$.

Par piemēru der skaitlis 3240.

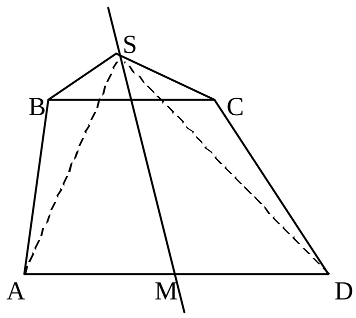
Pierādīsim, ka lielākas *n* vērtības neder. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$.

Tā kā *j*! dalās ar 2, ja $j \geq 2$, tad visiem cipariem $a_2, a_3, \ldots, a_n$ jābūt pāra skaitļiem. No tā seko, ka $n \leq 6$.

Tā kā *j*! dalās ar 3, ja $j \geq 3$, tad $a_1 + a_2 + \cdots + a_j$ dalās ar 3, ja $j \geq 3$; tātad cipariem a_4, a_5, a_6 jādalās ar 3. Tā kā tie ir arī pāra skaitļi, tad tie var būt tikai 0 vai 6. No tā seko ka $n \leq 5$.

Pieņemsim, ka $n = 5$. Tā kā 5!=120, tad $a_5 = 0$ un $a_4 = 6$. Skaitlim $\overline{a_1 a_2 a_3 60}$ jādalās ar 8, tomēr tas tā nav $\overline{a_1 a_2 a_3 60} = \overline{a_1 a_2 a_3} \cdot 100 + 60$; tā kā a_3 ir pāra cipars, tad pirmais saskaitāmais dalās ar 8, bet otrais nē – arī summa ar 8 nedalās. Tātad $n \neq 5$.

49.4. Skat. 49.2. zīm. .



49.2. zīm.

(1) $S_{ABNM} = S_{MNCD}$, jo šīm trapecēm ir vienādi pamati un augstumi.

(2) $S_{ASM} = S_{DSM}$, jo trijstūriem ir vienādi pamati un augstumi.

(3) $S_{BSN} = S_{CSN}$, jo trijstūriem ir vienādi pamati un augstumi.

Saskaitot (1) un (3) un atņemot (2), iegūstam prasīto.

49.5. Var izvietot 36 krustiņus, liekot tos zīmējumā parādītajā secībā.

18	19	20	22	23	25	26
17		21		24		27
15	16		14		29	28
13		12	10	11		30
7	8		9		32	31
6		4	5			33
1	2	3		36	35	34

49.2 zīm.

Pierādīsim, ka tas ir maksimālais skaits. Zīmējumā pavisam ir 112 mazo kvadrātu malas. Teiksim, ka krustiņš bloķē malu, ja tas atrodas blakus šai malai. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katru malu drīkst bloķēt augstākais vienu reizi un katrs krustiņš, izņemot pirmo, bloķē vismaz 3 malas. Tāpēc $4+3(n-1)\le 112$; $n\le 36$.

49.6. Piemēram, tāds ir vienādojums $(x-1)^3=2$.

49.7. Ja seši skaitļi, dalot ar 4, dod atlikumus 0, 0, 0, 1, 1, 1, tad nekādu 4 skaitļu summa ar 4 nedalās, jo dod atlikumus 1, 2 vai 3.

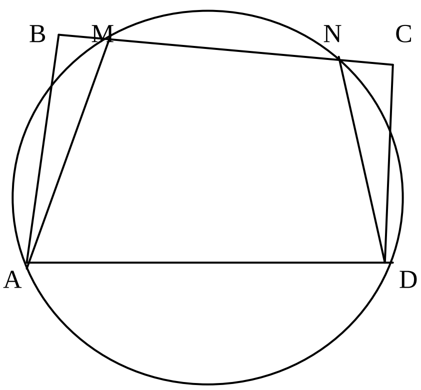
Pierādīsim, ka no 7 skaitļiem var izvēlēties četrus, kuru summa dalās ar 4.
Vispirms no 7 skaitļiem izvēlamies divus, kuru summa dalās ar 2: $x_1+x_2=2n_1$;

pēc tam no 5 atlikušajiem skaitļiem izvēlamies divus, kuru summa dalās ar 2 $x_3+x_4=2n_2$;

pēc tam no 3 atlikušajiem skaitļiem izvēlamies divus, kuru summa dalās ar 2 $x_5+x_6=2n_3$.
No skaitļiem n_1, n_2, n_3 izvēlamies divus ar vienādu paritāti; tad to summa dalās ar 2. Ja tie , piemēram, ir skaitļi n_1 un n_2, tad $x_1+x_2+x_3+x_4=2(n_1+n_2)$ dalās ar 4.

49.8. Aplūkojot dažādus gadījumus, pārbaudām, ka dotā nevienādība ir ekvivalenta ar trijstūra malu nevienādībām.

49.9. Skat. 49.3. zīm. .



49.3. zīm.

No vienādības $\angle MAN=\angle MDN$ seko, ka ap četrstūri $AMND$ var apvilkt riņķa līniju; tāpēc

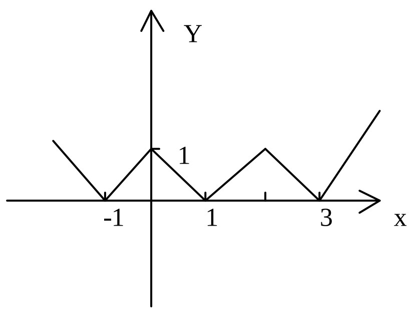
$$\angle BAD+\angle BCD=\angle BAM+\angle MAN+\angle NAD+\angle BCD=$$
$$(\angle CDN+\angle MDN)+\angle CMD+\angle BCD=$$
$$\angle MDC+\angle CDM+\angle MCD=180^\circ.$$

No šejienes seko prasītais apgalvojums.

49.10. Apzīmējam zēnus ar $A_1, A_2, J_1, J_2, P_1, P_2, M_1, M_2, Z_1, Z_2$. Pieņemsim, ka A_1 atrisināja tieši divus uzdevumus; varam pieņemt, ka vienu viņš atrisināja kopā ar J_1, P_1, M_1, Z_1, bet otru – ar J_2, P_2, M_2, Z_2.(Ar katru no šiem 8 zēniem viņam ir kopīgs uzdevums, un viņam nevar būt kopīga uzdevuma vienlaikus ar diviem zēniem, kam vienādi burti). Nevienu citu uzdevumu nevar būt atrisinājuši ≥ 3 zēni no kopām J, P, M, Z , jo pretējā gadījumā divi no tiem būtu vienā no sistēmām { J_1, P_1, M_1, Z_1 } un { J_2, P_2, M_2, Z_2 }, un tad tiem būtu divi kopīgi atrisināti uzdevumi – pretruna. Tāpēc katram no pāriem {J_1, P_2}, {J_1, M_2}, {J_1, Z_2}, {P_1, J_2}, {P_1, M_2}, {P_1, Z_2}, {M_1, J_2}, {M_1, P_2}, {M_1, Z_2}, {Z_1, J_2}, {Z_1, P_2}, {Z_1, M_2} vajag citu uzdevumu, kas nevar arī sakrist ne ar vienu no A_1 atrisinājumiem (tāpēc gadījuma divi zēni ar vienu vārdu būtu atrisinājuši to pašu uzdevumu.)

Esam jau ieguvuši 14 uzdevumus, tātad $n \geq 14$. Pieņemsim vēl, ka A_2 atrisinājis 4 uzdevumus -- tos, ko atrisināja {J_1, P_2}, {P_1, J_2}, {Z_1, M_2}, {M_1, Z_2}, tad visi uzdevuma nosacījumi ir izpildīti. Tātad ar 14 uzdevumiem pietiek.

49.11. Zīmējumā parādīts funkcijas y = $\left|\left||x-1|-1\right|-1\right|$ grafiks.



49.4. zīm.

No šejienes viegli redzēt, ka vienādojumam var būt 0; 2; 3; 4; 6 atrisinājumi.

49.12. Nē, nevar. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} < x + y + z$, kas pārveidojas par $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 < x^2yz + xy^2z + xyz^2$

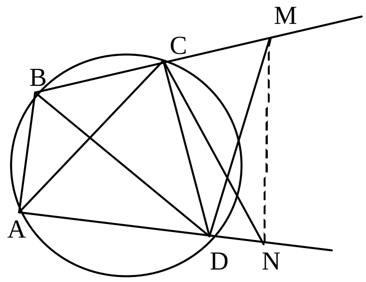
$$2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 2xy \cdot xz - 2xy \cdot yz - 2xz \cdot yz < 0$$

$$(xy - xz)^2 + (xy - yz)^2 + (xz - yz)^2 < 0$$ -- pretruna.

49.13. Ievērosim, ka $2^{2n+1} = 4^n \cdot 2 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$, bet $2^{2n} = 4^n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$. Izkrāsojot šaha galdiņu parastajā veidā redzam: melnajās rūtiņās esošo kviešu graudu skaits dod atlikumu 1, dalot ar 3, bet baltajās rūtiņās esošo kviešu graudu skaits dod atlikumu 2, dalot ar 3.

Atzīmēsim, ka zirdziņš no melna laucina vienmēr pāriet uz baltu, bet no balta – uz melnu. Tāpēc brīdī, kad viņš atgriežas izejas pozīcijā, viņš izdarījis pāra skaitu gājienu. Katros divos pēc kārtas izdarītos gājienos viņš kopā apēdis tādu graudu skaitu, kas dalās ar 3. No šejienes seko vajadzīgais.

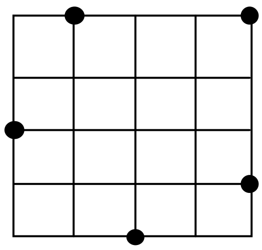
49.14. Tā kā $\angle CBD$ un $\angle CAD$ balstās uz vienu un to pašu loku, tad $\angle MBD = \angle CAN$.



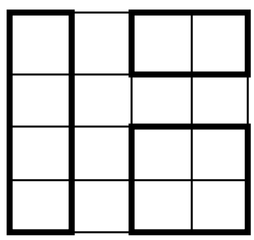
49.5. zīm.

Tā kā ΔMBD un ΔCAN ir vienādsānu, tad no $\angle MBD = \angle CAN$ seko, ka tie ir līdzīgi, tāpēc $\angle CMD = \angle CND$. Tāpēc ap četrstūri $CMND$ var apvilkt riņķa līniju. No šejienes seko, ka $\angle CMN = 180° - \angle CDN = \angle CDA = 180°° - \angle CBA$, tātad $\angle CMN + \angle CBA = 180°$, no kurienes seko vajadzīgais.

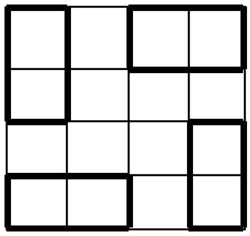
49.15. Tas, ka izvietot 5 punktus, redzams 49.6. zīmējumā.



49.6.1. zīm.



49.6.2. zīm.



49.6.3. zīm.

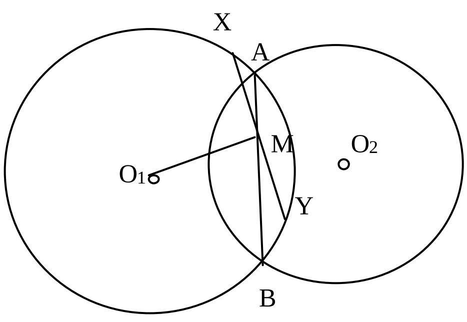
Pieņemsim, ka izdevies izvietot 6 punktus. Tad katrā no 2. zīmējumā redzamajām daļām atrodas ne vairāk kā 2 punkti (neliela gadījuma pārlase); tātad katrā no tām ir tieši 2 punkti.

Bet gadījumā "simetrijas dēļ" katrā no 3. zīmējumā attēlotajām daļām atrodas divi punkti, tātad pavisam to ir vismaz $2 \cdot 4 = 8$ -- pretruna. Tātad mūsu piemēros nepareizs, un 6 punktus prasītajā veidā izvietot nevar.

49.16. Pārrakstām vienādojumu formā $2\cos x = (x-1)^2 + 2$.

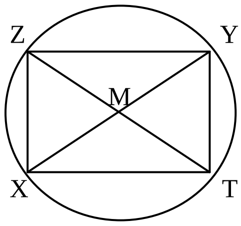
Acīmredzot, $(x-1)^2 + 2 \geq 2$ un $2\cos x \leq 2$. Tāpēc vienādība varētu pastāvēt tikai tad, ja $(x-1)^2 + 2 = 2$, t.i., ja $x = 1$. Bet $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, tāpēc $\cos 1 < 1$ un $2\cos 1 < 2$. Tātad vienādojumam atrisinājuma nav.

49.17.



49.7. zīm.

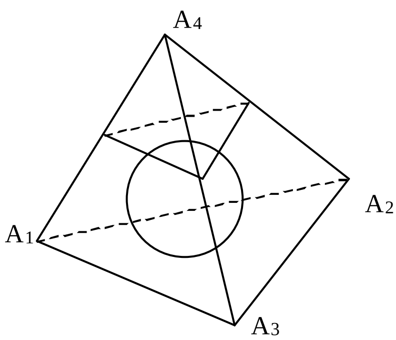
Saskaņā ar teorēmu par hordu nogriežņu reizinājumiem $MX \cdot MY = MA \cdot MB$. Tā kā, $O_1M \perp XY$, tad $XM = YM$; tāpēc $MX = MY = \sqrt{MA \cdot MB}$. Līdzīgi pierāda, ka $MT = MZ = \sqrt{MA \cdot MB}$, turklāt acīmredzami taisnes XY un ZT nesakrīt, jo tās perpendikulāras neparalēliem nogriežņiem O_1M un O_2M.



49.8. zīm.

Acīmredzami ar centru *M* var novilkt riņķa līniju, kas iet caur *X*, *Y*, *Z*, *T* un kam *XY* un *ZT* ir diametri. No tā arī seko četrstūra *XZYT* leņķu lielumu vienādība ar 90° -- tie ir ievilkti leņķi, kas balstās uz diametriem.

49.18. Acīmredzami, ka visas piramīdas ir līdzīgas sākotnējai. Pietiks pierādīt, ka līdzības koeficientu summa ir 2.



49.9. zīm.

Apzīmējot piramīdas skaldņu laukumus ar S_1, S_2, S_3, S_4, atbilstošos augstumus ar h_1, h_2, h_3, h_4, ievilktās lodes rādiusu ar *r*, tilpumu ar *V*, iegūstam: līdzības koeficients vienāds ar atbilstošo augstumu garumu attiecību, tāpēc mums jāpierāda, ka

$$\frac{h_1 - 2r}{h_1} + \frac{h_2 - 2r}{h_2} + \frac{h_3 - 2r}{h_3} + \frac{h_4 - 2r}{h_4} = 2 \quad \text{jeb}$$

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}$$

Pēdējo vienādību iegūst izdarot pārveidojumus:

$$\frac{1}{r} = \frac{S}{3V} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{3V} = \frac{S_1}{S_1 h_1} + \frac{S_2}{S_2 h_2} + \frac{S_3}{S_3 h_3} + \frac{S_4}{S_4 h_4} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}.$$

49.19. Ievērosim, ka sadalot skaitļus no 1 līdz 10000 pirmskaitļu reizinājumā, neparādīsies neviens cits pirmskaitlis bez $p_1, p_2, \dots, p_n$. Skaidrs, ka katram no šiem pirmskaitļiem eksistē tāds α_i, ka $p_i^{\alpha_i} > 10000$. Tad

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10000}<\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots+\frac{1}{p_2^{\alpha_2}}\right)\cdot\ldots\cdot$$
$$\left(1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\cdots+\frac{1}{p_n^{\alpha_n}}\right)$$

jo, labajā pusē atverot iekavas, parādās daļas, kuru saucējs ir <u>visi</u> iespējamie reizinājumi $p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_n^{x_n}$, $x_j\le\alpha_j$ tātad starp citu arī visi skaitļi 1, 2, … , 10000 (un vēl daudzi citi). Tālāk iegūstam

$$x<\left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\cdots\right)=$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}=\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_n}{p_n-1},$$

k.b.j.

49.20. Uzdevuma pierādījums seko no klasiskas lemmas.

Lemma. Ja katri divi no 6 punktiem savienoti ar baltu vai melnu līniju, tad var atrast trīs no tiem, kas visi savienoti ar vienas un tās pašas krāsas līnijām.

Pierādījums. Izvēlamies vienu punktu *A*. No tā iziet 5 līnijas. Var atrast 3 no tām, kas ir vienā krāsā (teiksim baltā). Pieņemsim, ka tās iet uz punktiem *B*, *C*, *D*. Ja kāda no līnijām *BC*, *BD*, *CD* ir balta, veidojas balts trijstūris; ja tās visas ir melnas, veidojas melns trijstūris *BCD*.

Tagad pārejam pie uzdevuma atrisinājuma.

a) Tā kā pavisam 8 punktus savieno 28 līnijas, tad nenokrāsotas ir tikai 2. Iespējami divi gadījumi:

a1) abiem nenokrāsotajiem nogriežņiem ir kopīgs galapunkts *X*. Tad nenokrāsoti ir nogriežņi *XA* un *XB*. Punkts *A* un atlikušie 5 punkti visi savienoti ar nokrāsotām līnijām; no lemmas seko prasītais;

a2) Nenokrāsoti ir nogriežņi XX_1 un YY_1. Tad punkti *X*, *Y* un atlikušie četri veido prasīto sešu punktu kopu.

b) Ar piemēru var parādīt, ka, ja novilktas 25 līnijas, tad vienkrāsainu trijstūri var neatrast.

49.21. Palielinot daļu saucējus līdz $x_1+x_3+x_5+x_7+x_9$ vai $x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}$, iegūstam

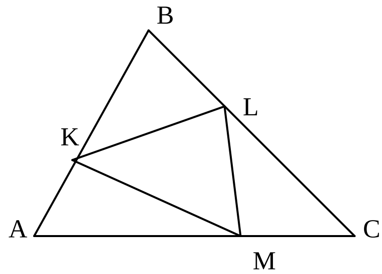
$$\frac{x_1}{x_{10}+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\frac{x_3}{x_2+x_4}+\cdots+\frac{x_9}{x_8+x_{10}}+\frac{x_{10}}{x_9+x_1}>$$
$$\frac{x_1+x_3+x_5+x_7+x_9}{x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}}+\frac{x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}}{x_1+x_3+x_5+x_7+x_9}=$$
$$\frac{N}{P}+\frac{P}{N}\geq 2.$$

Tātad par skaitli c var izvēlēties 2. Pierādīsim, ka izteiksme var kļūt cik patīk tuva skaitlim 2; skaidrs, ka tādā gadījumā c nevar būt lielāks par 2.

Izvēlēsimies lielu skaitli M un

$x_1=1,\ x_2=M,\ x_3=M^2,\ldots,\ x_8=M^7,\ x_9=M^8,\ x_{10}=M^8.$ Tad vajadzīgais tiek sasniegts.

49.22. Pierādām, ka trijstūris ABC ir regulārs, no kā seko uzdevuma apgalvojums.



49.10. zīm.

Ja minēto rādiusu garums ir R, tad

$$KM=2R\sin A$$
$$KL=2R\sin B$$
$$LM=2R\sin C;$$

tāpēc $KM:KL:LM=\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$. Tad ΔLMK līdzīgs ar ΔABC.

Tā kā saskaņā ar formulu $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, tad $S_{AMK}=S_{CLM}=S_{BKL}=\frac{2}{9}S_{ACB}$, un $S_{LMK}=\frac{1}{3}S_{ABC}$. Tāpēc līdzības koeficients ir $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

No kosinusu teorēmas trijstūrim ABC $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

No kosinusu teorēmas trijstūrim AKM $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2=\left(\frac{2b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2-2\cdot\frac{2b}{3}\cdot\frac{c}{3}\cdot\cos A$.

Tātad $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$ un $2bc\cos A=\frac{1}{2}\left(4b^2+c^2-3a^2\right)$. Tāpēc $2b^2+2c^2-2a^2=4b^2+c^2-3a^2$ un $a^2+c^2=2b^2$. Līdzīgi iegūstam $a^2+b^2=2c^2$ un $b^2+c^2=2a^2$. No šīm vienādībām seko, ka $a=b=c$.

49.23. Viegli redzēt, ka

$$2f(x) = 2xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot \left(f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$x \cdot \left(1 + f\left(\frac{2}{x}\right)\right) = x \cdot \left(1 + \frac{2}{x} f\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$x + 2f\left(\frac{x}{2}\right) = x + \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = x + 1 + f(x).$$

Tātad $f(x) = x + 1$. Nepieciešama pārbaude.

49.24. Apskatām gadījumu n = 6. Kopai A ir $C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ triju elementu apakškopas. Tā kā $20 > 6 \cdot 2$, tad eksistē tāda triju elementu apakškopa *T*, kas atšķiras gan no visām sešām dotajām apakškopām, gan no to papildinājumiem: tātad šķeļas gan ar katru no 6 dotajām apakškopām, gan ar katru no to papildinājumiem. Ja *T* elementus nokrāso baltus, bet *T* papildinājuma elementus – melnus, vajadzīgais ir iegūts.

Apgalvojumu tālākajām n vērtībām pierādīsim ar matemātisko indukciju.

49.25. Viegli pārbaudīt, ka

$a_1 = 99$;

$a_2 = 99 + 11 = 110$;

$a_3 = 110 + 11 = 121 = 11^2$

$a_4 = 11^2 + 11 = 11 \cdot 12$

$a_5 = 11 \cdot 12 + 11 = 11 \cdot 13$

$a_6 = 11 \cdot 13 + 13 = 12 \cdot 13$

$a_7 = 12 \cdot 13 + 13 = 13^2$

Lemma. Ja $a_x = p^2$, p – pirmskaitlis, un nākošais pirmskaitlis aiz p un q, tad $a_{x+2(q-p)} = q^2$.

Pierādījums. Ja $a_x = p^2$, tad $a_{x+1} = p^2 + p = p(p+1)$. Skaitļa p + 1 pirmreizinātāji ir mazāki par p, tāpēc $a_{x+2} = p(p+1) + p = p(p+2)$. Skaitļa p+ 2 pirmreizinātāji ir mazāki par p, tāpēc $a_{x+3} = p(p+2) + p = p(p+3)$.

Arī tālāk lielākais pieskaitāmais pirmreizinātājs būs p, kamēr mēs iegūsim $a_{x+(q-p)} = p \cdot q$. Tālāk q – p reizes tiks pieskaitīts q, kamēr iegūsim $a_{x+2(q-p)} = q^2$.

Lemma pierādīta.

No lemmas izriet: ja $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ ir augoša visu pirmskaitļu virkne (sākot ar kaut kādu p_1), un $a_x = p_1^2$, tad $a_{x+2(p_2-p_1)} = p_2^2$, utt.,

$$a_{x+2(p_k-p_1)} = p_k^2 .$$

Tā kā $a_3 = 11^2$, $a_{1999} = a_{3+2(1009-11)}$ un gan 11, gan 1009 ir pirmskaitļi, iegūstam $a_{1999} = 1009^2$.