Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 49. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

9. klase

49.1. Dots, ka a un b – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+b}=0$ ir divas saknes, pie tam viena no tām ir pozitīva, bet otra – negatīva.

49.2. Dots, ka ABC – vienādmalu trijstūris, M malas AB iekšējais punkts, CMN – vienādmalu trijstūris, pie tam B un N atrodas vienā pusē no taisnes CM. Pierādīt, ka $BN \parallel AC$.

49.3. Noskaidrot, kādam lielākajam n eksistē n–ciparu naturāls skaitlis, kam vienlaicīgi piemīt šādas divas īpašības:

a) visi tā cipari ir dažādi,

b) tā pirmo j ciparu veidotais skaitlis dalās ar reizinājumu $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot j$, ja $j=1; 2; \ldots ; n$.

49.4. Trapeces $ABCD$ pamatu AD un BC viduspunkti ir atbilstoši M un N. Uz taisnes MN ņemts punkts S, kas neatrodas ne uz vienas sānu malas pagarinājuma. Pierādīt, ka trijstūru ABS un CDS laukumi ir vienādi.

49.5. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Vienā no tām ievelk krustiņu. Tālāk krustiņus pa vienam var ievilkt arī citās rūtiņās, ievērojot nosacījumu: jaunu krustiņu drīkst ievilkt tādā rūtiņā, kurai ir kopēja mala ar augstākais vienu aizpildītu rūtiņu. Kādu lielāko daudzumu rūtiņu var aizpildīt ar krustiņiem?

10. klase

49.6. Sastādīt kaut vienu vienādojumu ar veseliem koeficientiem, kam viena no saknēm ir $1+\sqrt[3]{2}$.

49.7. Atrast mazāko naturālo n ar īpašību: no katriem dažādiem n veseliem skaitļiem var izvēlēties tieši 4 skaitļus tā, lai izvēlēto skaitļu summa dalītos ar 4.

49.8. Dots, ka a, b, c – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka trijstūris ar malu garumiem a, b, c eksistē tad un tikai tad, ja $a+b-|a-b|>|a+b+|a-b|-2c|$.

49.9. Uz izliekta četrstūra $ABCD$ malas BC ņemti punkti M un N (M atrodas starp B un N). Dots, ka $\angle BAM=\angle CDN$ un $\angle MAN=\angle MDN$. Pierādīt, ka ap $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.

49.10. Matemātikas pulciņā darbojas divi Andri, divi Jāņi, divi Pēteri, divi Mārtiņi un divi Zigurdi. Mājās bija uzdoti n uzdevumi. Nekādi divi zēni ar vienādiem vārdiem neatrisināja vienu un to pašu uzdevumu. Katriem diviem zēniem ar dažādiem vārdiem atradās tieši viens uzdevums, ko viņi abi atrisināja. Viens no zēniem atrisināja tieši 2 uzdevumus. Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?

11. klase

49.11. Cik atrisinājumu reālos skaitļos var būt vienādojumam $|||x-1|-1|-1|=a$?

49.12. Vai pozitīviem skaitļiem x, y, z var vienlaicīgi izpildīties nevienādības $\frac{xy}{z}<x+y-z$, $\frac{xz}{y}<x-y+z$, $\frac{yz}{x}<-x+y+z$?

49.13. Šaha galdiņš sastāv no 8×8 lauciņiem. Lauciņos novietoti kviešu graudi; to skaits redzams zīmējumā. Šaha zirdziņš, sākot no kāda lauciņa, izdara virkni gājienu.

2^{63}	2^{62}	2^{61}	2^{60}	2^{59}	2^{58}	2^{57}	2^{56}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{47}	2^{46}	2^{45}	2^{44}	2^{43}	2^{42}	2^{41}	2^{40}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{31}	2^{30}	2^{29}	2^{28}	2^{27}	2^{26}	2^{25}	2^{24}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^{9}	2^{8}
2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}

Gājiena rezultātā nonākot kādā lauciņā, zirdziņš apēd visus tur esošos graudus (bet viņš neapēd sākuma lauciņā esošos graudus pirms sava pirmā gājiena). Tikko zirdziņš aiziet no lauciņa, kurā viņš graudus apēdis, mēs novietojam tur tikpat graudu, cik tajā nupat tika apēsts. Pēc kāda laika zirdziņš atgriežas sākuma lauciņā un apēd tur esošos graudus. Pierādiet, ka šai brīdī viņa apēsto graudu skaits dalās ar 3.

49.14. Četrstūris *ABCD* ievilkts riņķa līnijā. Uz stara *BC* atlikts punkts *M* tā, ka $BM = BD$; uz stara *AD* atlikts punkts *N* tā, ka $AN = AC$. Pierādīt, ka $MN \parallel AB$.

49.15. Kvadrāts ar izmēriem 4×4 sadalīts 16 rūtiņās ar izmēriem 1×1. Noskaidrot, kādu lielāko daudzumu no 25 rūtiņu virsotnēm var nokrāsot sarkanas tā, lai vienlaicīgi izpildītos divas prasības:

a) nekādi trīs sarkanie punkti neatrodas un vienas taisnes,

b) katram trijstūrim, kuram visas virsotnes ir sarkanas, laukums ir lielāks par 2.

12. klase

49.16. Atrisināt vienādojumu $2\cos x = x^2 - 2x + 3$.

49.17. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 ar centriem atbilstoši O_1 un O_2 krustojas punktos *A* un *B*. Punkts *M* ir nogriežņa *AB* iekšējais punkts, kas nav *AB* viduspunkts. Taisne, kas caur *M* vilkta perpendikulari O_1M, krusto ω_1 punktos *X* un *Y*; taisne, kas caur *M* vilkta perpendikulāri O_2M, krusto ω_2 punktos *T* un *Z*. Pierādīt, ka *X*, *Y*, *T*, *Z* ir taisnstūra virsotnes.

49.18. Trijstūra piramīdā *ABCD* ievilkta lode. Katrai skaldnei novilkta tai paralēla plakne, kas pieskaras lodei; šī plakne atšķeļ no *ABCD* mazāku piramīdu. Pierādīt, ka četru atšķelto piramīdu visu 24 šķautņu garumu summa ir divas reizes lielāka par *ABCD* visu šķautņu garumu summu.

49.19. Pieņemsim, ka $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ir pirmskaitļi, kas nepārsniedz 10000 (katrs vienu reizi). Pierādīt, ka

$$\frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n}{p_n - 1} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{10000} .$$

49.20. Telpā doti 8 punkti. Katri divi no tiem savienoti ar līniju, kas neiet caur citiem punktiem; līnijām nav citu kopīgu punktu kā galapunkti.

a) dažas līnijas nokrāsotas baltas, dažas – melnas, bet dažas atstātas nenokrāsotas tā, ka pavisam nokrāsotas 26 līnijas. Pierādīt, ka var atrast tādus trīs punktus, kas visi savā starpā savienoti ar vienas un tās pašas krāsas līnijām,

b) vai tādus trīs punktus noteikti var atrast, ja pavisam nokrāsotas 25 līnijas?

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

49.21. Atrast vislielāko tādu konstanti *C*, ka visiem pozitīviem $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ izpildās nevienādība

$$\frac{x_1}{x_{10}+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\frac{x_3}{x_2+x_4}+\cdots+\frac{x_9}{x_8+x_{10}}+\frac{x_{10}}{x_9+x_1}\geq C$$

49.22. Uz trijstūra *ABC* malām *AB*, *BC*, *CA* ņemti atbilstoši punkti *K*, *L*, *M* tā, ka $\frac{AK}{KB}=\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MA}=\frac{1}{2}$. Ap trijstūriem *AKM*, *BLK*, *CML* apvilkto riņķu rādiusi ir vienādi. Pierādīt, ka arī tajos ievilkto riņķu rādiusi ir vienādi.

49.23. Funkcija $f(x)$ definēta visiem $x \neq 0$, tās vērtības ir reāli skaitļi. Zināms, ka

$$f(x)=x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right), \text{ ja } x\neq 0 \text{ un}$$

$$f(x)+f(y)=1+f(x+y), \text{ ja } x\neq 0,\ y\neq 0,\ x+y\neq 0.$$

Atrast funkciju *f*.

49.24. Kopā *A* ir *n* elementi, $n \geq 6$. Dotas kaut kādas sešas dažādas *A* apakškopas; katrā no tām ir 3 elementi. Pierādīt, ka *A* elementus var nokrāsot baltā un melnā krāsā (katru elementu – vienā krāsā), lai neviens no 6 dotajām apakškopām nebūtu vienkrāsaina. (Ja vispārīgais gadījums rada grūtības, apskatiet tikai gadījumu, kad $n = 6$)

49.25. Skaitļu virkni $a_1, a_2, a_3, \ldots$ veido sekojoši:

$a_1 = 99$;

$a_{n+1} = a_n + p(a_n)$, kur ar $p(x)$ apzīmēts lielākais pirmskaitlis, ar kuru dalās *x*.

Aprēķināt a_{1999}.