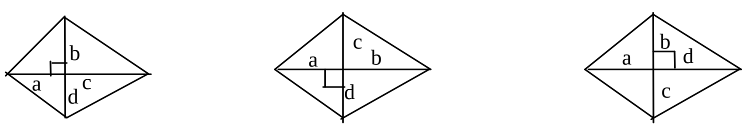
LATVIJAS 51. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3. KĀRTAS UZDEVUMU ATRISINĀJUMI.

9.1. a) piemēram, tā: (0;0) $\to$ (0;5) $\to$ (3;1) $\to$ (0;-3) $\to$ (-4;0) $\to$ (1;0);
b) tā kā sienāzis režģī var nokļūt uz blakus punktu, tad viņš pakāpeniski var nokļūt uz jebkuru režģa punktu.

9.2. Apzīmēsim dalījumu ar k. Tā kā A un B ir vienāds ciparu skaits (B≥A!), tad k<10. Piemēri A=111; A=2178; A=1089 parāda, ka k var būt 1; 4; 9. Pierādīsim, ka citu iespēju nav. Apzīmēsim A un B pirmos ciparus atbilstoši ar a un b. Ja k>1, tad a<b. Ja k≥5, tad a=1; tāpēc k nevar būt 5; 6; 8 (jo šajos gadījumos k·A nevar beigties ar ciparu 1) vai 7, jo tad b=3 un tāpēc k·A ≥7000>3999 ≥B. Ja k=3, tad ,lai A un B būtu vienāds ciparu skaits, a jābūt 1, 2 vai 3. No vienādības $3\overline{a...b}=\overline{b...a}$ seko, ka b ir atbilstoši 7, 4 vai 1 (lai sakristu pēdējie cipari); tomēr šajos gadījumos pretruna rodas, aplūkojot pirmos ciparus. Beidzot, ja k=2, tad no vienādības $2\overline{a...b}=\overline{b...a}$ pēdējās šķiras seko 2b=a+10, un no pirmās šķiras seko b=2a vai b=2a+1 (atkarībā no tā, vai otrajā šķirā rodas vai nerodas pārnesums). Ne vienā, ne otrā gadījumā a neiznāk vesels.

9.3. Figūras F laukumu apzīmēsim ar L(F). Katrs četrstūra XYZT punkts pieder vismaz vienam no trijstūriem OXY; OYZ; OZT; OTX. Tāpēc apskatāmā četrstūra laukums nav lielāks par L(OXY)+L(OYZ)+L(OZT)+L(OTX). Savukārt neviena trijstūra ABC laukums nepārsniedz $\frac{1}{2}AB\cdot AC$. Tāpēc apskatāmā četrstūra laukums nav lielāks par $\frac{1}{2}(OX\cdot OY+OY\cdot OZ+OZ\cdot OT+OT\cdot OX)$ un var būt vienāds ar to tikai gadījumā, ja vienlaicīgi a) OX⊥OY, OY⊥OZ, OZ⊥OT, OT⊥OX,
b) trijstūri OXY, OYZ, OZT, OTX nepārklājas.
Tas ir sasniedzams, ja XYZT diagonāles ir perpendikulāras un O ir diagonāļu krustpunkts. Pastāv trīs iespējas (skat. 1. zīm.)



1.zīm.

Laukumi ir attiecīgi $L_1=\frac{1}{2}(a+c)(b+d), L_2=\frac{1}{2}(a+b)(c+d), L_3=\frac{1}{2}(a+d)(b+c).$

Ievērojam, ka

$$L_3-L_1=\frac{1}{2}(ab+ac+bd+cd-ab-ad-bc-cd)=\frac{1}{2}(ac+bd-ad-bc)=\frac{1}{2}(a-b)(c-d)>0$$

Līdzīgi pierāda, ka $L_3>L_2$. Tātad lielākais iespējamais laukums ir $\frac{1}{2}(a+d)(b+c)$.

9.4. No dotā seko $\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}=a$ jeb $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{a}{2}$. Dalot skaitītāju un saucēju ar y^2 un apzīmējot $\frac{x^2}{y^2}=\alpha$, iegūstam $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{a}{2}$, no kurienes $\alpha=\frac{a+2}{a-2}$. Meklējamā izteiksme ir $\frac{(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2}{x^4-y^4}=\frac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4}=2\cdot\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}=\frac{a^2+4}{2a}$. Viegli pārliecināties, ka visās izteiksmēs saucēji atšķirīgi no 0 (risinājumā tas nepieciešams!).

9.5. a) jā, var. Apskatīsim tās 4 rindas, kurās ir visvairāk krustiņu. Ja tajās kopā būtu mazāk par 8 krustiņiem, tad vismaz vienā no tām ir ≤1 krustiņš (jo 4·2=8); tāpēc kopā būtu mazāk par 12 krustiņiem (jo četrās citās rindās nav vairāk krustiņu kā tajā no izvēlētajām, kurā ir ≤1 krustiņš) - pretruna. Tātad mūsu apskatāmajās rindās ir vismaz 8 krustiņi. Nokrāsojam tās. Paliek nenokrāsoti ≤ 4 krustiņi, kurus var nokrāsot, nokrāsojot 4 kolonnas.

b) ne noteikti. Skat.2. zīm.

x				x			
x	x						
	x	x					
		x	x				
			x	x			
					x		
						x	
							x

2. zīm.

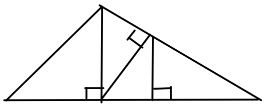
x				x
x	x			
	x	x		
		x	x	
			x	x

3. zīm.

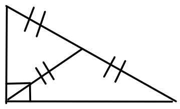
Lai nokrāsotu krustiņus labajā apakšējā daļā, jānokrāso vismaz 3 līnijas. Tāpēc 3. zīm. redzamās daļas krāsošanai paliek augstākais 5 līnijas, pie tam ne vairāk kā 4 no tām ir rindas un ne vairāk kā 4 - kolonnas. Tā kā katra līnija te satur 2 krustiņus, tad jābūt izmantotām 5 līnijām, lai nokrāsotu 10 krustiņus. Pieņemam, ka izmantotas a rindas un b kolonnas, a+b=5, 1≤a≤4, 1≤b≤4. Tāpēc vai nu a≥3, vai b≥3. Simetrijas pēc varam pieņemt, ka a≥3. Tad vai nu a=3 un b=2, vai a=4 un b=1. Otrajā gadījumā vienīgā krāsotā kolonna nesatur abus krustiņus, kas atrodas vienīgajā nenokrāsotajā rindiņā. Pirmajā gadījumā abas krāsotās kolonnas nesatur tos 4 krustiņus, kas atrodas abās nenokrāsotajās rindiņās, jo tad šajās rindiņās krustiņi būtu "vienās un tais pašās vietās". Tātad 2. zīm. parādītos krustiņus uzdevumā prasītajā veidā nokrāsot nevar.

10.1. Varam pieņemt, ka $|a|\geq|b|$ un $|a|\geq|c|$. Tad nevienādība $b^2+bc>2a^2$ nav pareiza. Tātad visas trīs nevienādības noteikti vienlaicīgi nav pareizas. Piemēri a=b=c=1; a=b=100, c=1; a=100, b=c=1 parāda, ka pareizas var būt 0; 1; 2 no tām.

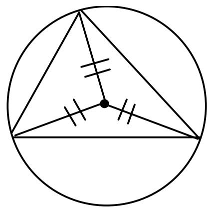
10.2. a)jebkuru trijstūri var sagriezt 1000 taisnleņķa trijstūros (4. zīm.), katru taisnleņķa trijstūri - divos vienādsānu trijstūros (5. zīm.)



4.zīm.



5.zīm.

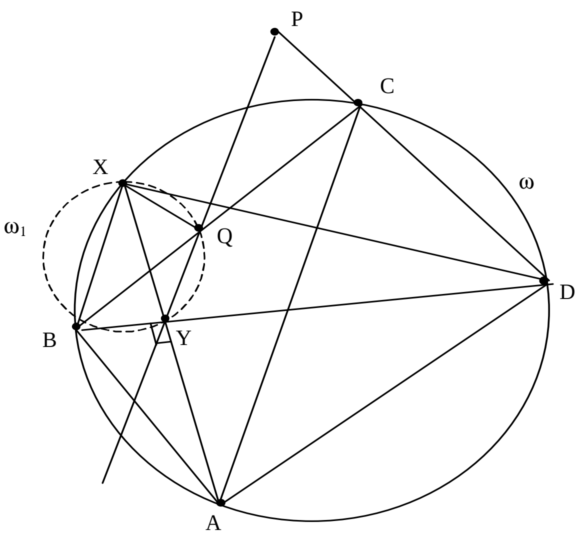


6.zīm.

b) no patvaļīga trijstūra var atšķelt šaurleņķu trijstūri tā, ka pāri paliek trijstūris T. Tā kā šaurleņķu trijstūrim apcentrs atrodas iekšpusē, to var sagriezt 3 vienādsānu trijstūros (6. zīm.). Pēc tam T sagriež 1998 vienādsānu trijstūros kā a) daļas risinājumā.

10.3. No dotā seko, ka vienādojumam P(t)=0 ir divas saknes t_1 un t_2, un pa divām saknēm ir vienādojumiem (1) Q(x)= t_1 un (2) Q(x)= t_2. No Vjeta teorēmas seko: ja (1) saknes ir x_1 un x_2, bet (2) saknes ir x_3 un x_4, tad $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Tāpēc $x_4 = x_1 + x_2$ - x_3. Iegūstam trīs dažādas iespējas: x_4=3+15-2001=-1983, x_4=3+2001-15=1989, x_4=15+2001-3=2013. Vēl jāpārbauda, vai atbilstošie polinomi Q un P eksistē. Tā patiešām ir visos gadījumos. Piemēram: Q(x)= t_1 ir saknes 3 un 15, bet Q(x)= t_2 ir saknes 2001 un -1983, tad varam ņemt Q(x) $= x^2 - 18x$, t_1=-3·15, t_2=2001·1983 un P(x)= (x + 3·15)(x - 2001·1983).

10.4.



7. zīm.

Skaidrs, ka X atrodas uz dotās r.l.ω. Tā kā ∠XAC=∠XBC un ∠XYQ=∠XAC, tad ∠XYQ=∠XBQ, tāpēc X, Y, B, Q pieder riņķa līnijai ω_1. Tāpēc ∠XQB=∠XYB=90°, tātad <u>∠XQC= 90°</u>. Tā kā ∠BCD=90°, tad arī <u>∠PCQ=90°</u>. Tā kā ∠*XDP*=∠XDC=∠XAC=∠*XYP*, tad punkti X,P,D,Y atrodas uz vienas r.l. ω_2. Tāpēc <u>∠XPD=180°-∠XYD=90°</u>. No ar taisnu līniju pasvītrotajām vienādībām seko vajadzīgais.

10.5. Skaidrs, ka der n=5 (2^5=32) un n=6 (2^6=64). Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav. Pieņemsim, ka no 2^n uzdevumā dotajā veidā iegūts 2^m, nosvītrojot pirmo ciparu a; skaitlim 2^m ir k ciparu. Tad $2^n=a\cdot 10^k+2^m$ un $2^m(2^{n-m}-1)=a\cdot 10^k$. Tātad 2^{n-m}-1 dalās ar 5. Tā kā divnieka pakāpes, dalot ar 5, cikliski dod atlikumus 2; 4; 3; 1, tad n-m=4t. Tāpēc

$$a\cdot 10^k = 2^m\cdot(2^{2t}+1)\underbrace{(2^t+1)(2^t-1)}_{2^{2t}-1} \quad (*)$$

Skaitļi 2^t+1 un 2^t-1 ir nepāra skaitļi, kuru starpība ir 2; tāpēc tie ir savstarpēji pirmskaitļi. Tas pats attiecas uz 2^{2t}+1 un 2^{2t}-1. Tātad vienādībā (*) labajā pusē ir 3 nepāra skaitļi, kas ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi. Ja tie visi >1, tad skaitlim kreisajā pusē ir 3 dažādi nepāra pirmreizinātāji - pretruna, jo a ir cipars. Tāpēc 2^t-1=1 un t=1, $a\cdot 10^k= 15\cdot 2^m$. Spriežot par dalīšanos ar 5, redzam, ka k=1 un tāpēc $a=3\cdot 2^{m-1}$. Tā kā a ir cipars, tad der tikai m=1 un m=2, no kurienes iegūstam sākumā minētās atbildes.

11.1. Viegli pārbaudīt, ka $\left(\sqrt{2}\pm 1\right)^3 = 5\sqrt{2}\pm 7$. No šejienes seko vajadzīgais.

11.2. Nē, neeksistē. Apzīmēsim f(0) = a. Tad no dotā seko $a-a^2\ge\frac{1}{4}$ jeb $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\le 0$, tātad $a=\frac{1}{2}$. Līdzīgi, apzīmējot f(1) = b, iegūstam $b=\frac{1}{2}$. Bet tad f(0) = f(1), kas ir pretrunā ar nosacījumu d).

11.3. Pārveidojam vienādojumu par $(y+x)(y-x)=3^x$. Tāpēc $y-x=3^k$, $y+x=3^{x-k}$ ($0\le k\le x$). Tā kā y-x<y+x, tad k<x-k un $k<\frac{x}{2}$. Šķirojam vairākus gadījumus.

A. k = 0. Tad y-x=1, $y+x=3^x$; tāpēc $x+1=3^x-x$ un $2x+1=3^x$. Der x = 1; pie x>1 acīmredzot $3^x=(1+2)^x>1+2x$. Tātad šai gadījumā **x=1; y=2**.

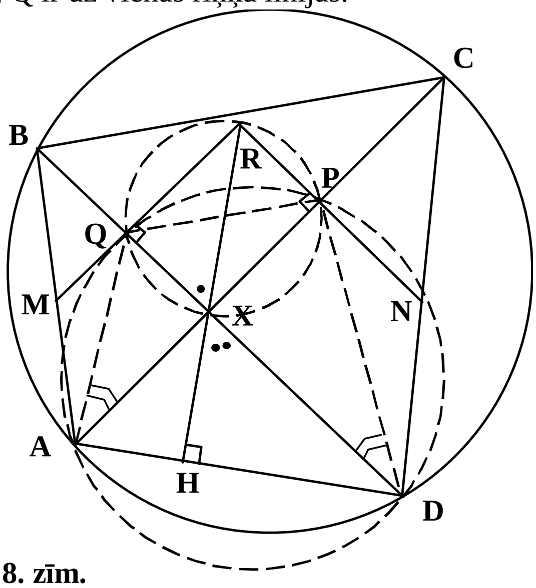
B. k = 1. Tad y-x=3, $y+x=3^{x-1}$, tāpēc $x+3=3^{x-1}-x$ un $2x+3=3^{x-1}$. Neder x = 1 un x = 2, der **x = 3, y = 6**. Ja x>3, iegūstam $3^{x-1}=3\cdot 3^{x-2}=3(1+2)^{x-2}>3(1+2(x-2))=6x-9$. No 2x+3>6x-9 seko x<3 - pretruna.

C. k≥2. Tad no y-x=3^k un $y+x=3^{x-k}$ seko y = x+3^k un $y=3^{x-k}-x$; tātad $x+3^k=3^{x-k}-x$ un $2x+3^k=3^{x-k}$. Tā kā x>2k, tad labā puse dalās ar 3^k; tāpēc 2x un arī x dalās ar 3^k, x=$3^k\cdot$t, t≥1. Iegūstam $2\cdot 3^k\cdot t+3^k=3^{3^k\cdot t-k}$ un, dalot ar 3^k,

$2\cdot t+1=3^{3^k\cdot t-2k}$ $(*)$. Pie $k\geq 2$ iegūstam $3^k=(1+2)^k>1+2k$, tāpēc no $(*)$ seko $2\cdot t+1>3^{(1+2k)t-2k}\geq 3^t=(1+2)^t\geq 1+2t$ - pretruna.

Tāpēc vienīgie atrisinājumi ir x = 1; y = 2 un x = 3; y = 6.

11.4. Apzīmēsim no N un M vilkto perpendikulu krustpunktu ar R; P un Q ir punkti, kuros šie perpendikuli krusto attiecīgi AC un BD. No X vilktā perpendikula pamatu apzīmēsim ar H. Mums jāpierāda, ka R; X; H atrodas uz vienas taisnes. Savienojam R un X. Tad R; P; X; Q ir uz vienas riņķa līnijas.



8. zīm.

No ievilktiem leņķiem seko, ka ΔAXB~ΔDXC. Tā kā M un N - atbilstošo malu viduspunkti, tad arī ΔAXQ~ΔDXP. Tāpēc ∠QAX = ∠PDX; tāpēc A; Q; P; D ir uz vienas riņķa līnijas. Tātad ∠ADQ = ∠APQ = ∠XPQ = ∠XRQ. No ∠ADQ = ∠XRQ seko 90^o - ∠ADQ = 90^o - ∠XRQ jeb ∠•• = ∠• . Tā kā QXD ir taisne, tad no šejienes seko, ka arī RXH ir taisne.

11.5. **a)** Visas 16 iespējamās tabulas ar izmēriem 2x2 var atrast 9.zīm.; tātad pietiek nokrāsot 25 rūtiņas.

1	1	2	2	1
2	1	1	2	2
1	2	2	1	1
2	2	1	1	2
2	2	1	1	2

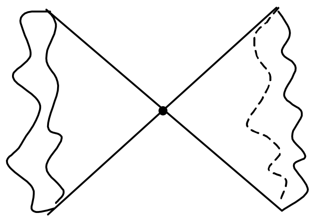
9.zīm.

b) parādīsim, ka jānokrāso vismaz 25 rūtiņas. Katrai no vajadzīgajām 16 tabulām ir sava kreisā augšējā rūtiņa. Domāsim, kā izvietojas šīs 16 rūtiņas; pieņemsim, ka tās atrodas x horizontālēs un y vertikālēs. Tā kā $xy\geq 16$, tad $x+y\geq 2\sqrt{xy}\geq 2\cdot 4=8$. Ievērosim, ka katrā rindā labējai no 16 apskatītajām "īpašajām" rūtiņām pa labi ir vēl viena "neīpaša", un katrā kolonnā apakšējai "īpašajai" rūtiņai apakšā ir vēl viena "neīpaša". Tāpēc apskatāmajās x rindās un y kolonnās ir vēl x+y, tātad vismaz 8 “neīpašas” rūtiņas. Beidzot, no pašas labējās starp apakšējām “īpašajām” rūtiņām diagonāli pa labi un uz leju ir vēl viena “neīpaša” rūtiņa. Tātad pavisam ir vismaz 16+8+1 = 25 rūtiņas.

12.1. Ievērojam, ka

$$14+4\cos(\alpha-\beta)+6\cos(\alpha-\gamma)+12\cos(\beta-\gamma)=$$
$$=14+4\cos\alpha\cos\beta+6\cos\alpha\cos\gamma+12\cos\beta\cos\gamma+4\sin\alpha\sin\beta+6\sin\alpha\sin\gamma+12\sin\beta\sin\gamma=$$
$$=(\sin\alpha+2\sin\beta+3\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+2\cos\beta+3\cos\gamma)^2\geq 0$$

12.2. Ir iespējams, ka n=6 (piemēram, taisnes, kas savieno ikosaedra pretējās virsotnes pa pāriem). Pierādīsim, ka $n\leq 6$. Pieņemsim, ka t_1 un t_2 ir divas no apskatāmajām taisnēm. Rotēsim taisni t_1 ap t_2; rodas virsma S, kas sastāv no divu bezgalīgu konusu sānu virsmām (skat. 10. zīm.).

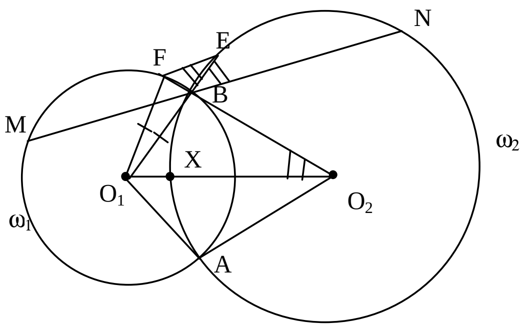


10. zīm.

Līdzīgi iegūst virsmu Q, rotējot taisni t_2 ap t_1. Visas citas taisnes ir S un Q šķēluma līnijas. Bet S un Q var šķelties pa augstākais 4 taisnēm. Tātad kopā taišņu nav vairāk par 2+4=6.

12.3. Ja $y\geq 6$, tad y! dalās ar 9. Skaitlis 2001 dalās ar 3, bet nedalās ar 9. Tātad y!+2001 dalās ar 3, bet nedalās ar 9. Tātad y!+2001 nav naturāla skaitļa kvadrāts. Pārbaudot y=1; 2; 3; 4; 5, der tikai y=4; tad x=45.

12.4.



11. zīm.

a) tā kā $O_1B = O_1F$, tad $\angle O_2FO_1 = \angle FBO_1$. Tā kā $\Delta O_1AO_2 = \Delta O_1BO_2$ (mmm), tad $\angle O_2AO_1 = \angle O_2BO_1$. Tāpēc $\angle O_2FO_1 + \angle O_2AO_1 = \angle FBO_1 + \angle O_1BO_2 = 180°$. Tāpēc ap O_1FO_2A var apvilkt riņķa līniju. Tāpat pierāda, ka ap O_1EO_2A var apvilkt riņķa līniju. bet tā ir viena un tā pati r.l. (tā, kas apvilkta ap $\Delta\ O_1AO_2$).

b) skat. 11.zīm.

No a) punktā pierādītā $\angle FEB = \angle FO_2O_1$ (ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu loku).

Bet $\angle FEB = \angle EBN$, tāpēc $\angle EBN = \angle BO_2O_1$. Tāpēc $\frac{1}{2}\overset{\cup}{EN} = \overset{\cup}{BX}$ un

$\overset{\cup}{EN} = 2\overset{\cup}{BX} = \overset{\cup}{BXA}$. Tāpēc hordas BE un AN ir paralēlas. Tāpēc ABEN ir trapece. Tā kā tā ir ievilkta riņķa līnijā, tad tā ir vienādsānu. Tāpēc AE=BN. Līdzīgi pierāda, ka AF=BM. No tā seko vajadzīgais.

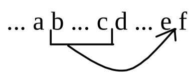
12.5. Pieņemsim, ka sākumā sējumu secība ir 1; 2; ...; 10.

a) pierādīsim, ka der x=6. Ievietojam

(7, 8) starp 1 un 2; (6, 9) starp 7 un 8;
(5, 10) starp 6 un 9; 4 starp 5 un 10;
(1, 7, 6, 5, 4) starp 2 un 3; (2, 1) aiz 3.

b) dosim pēc kārtas vairākus "apakšējos novērtējumus". Sauksim par nekārtību divu blakus stāvošu grāmatu pāri, ja pa kreisi esošajai grāmatai ir mazāks numurs nekā pa labi esošajai. (Tātad viena grāmata var piedalīties arī divās nekārtībās). Sākumā ir 9 nekārtības. Izceļot no plaukta grāmatu grupu, mēs likvidējam augstākais 2 nekārtības; ievietojot to plauktā, mēs likvidējam augstākais 1 nekārtību. Tātad vajadzīgi vismaz 3 gājieni. Tomēr *pirmais* gājiens kopā samazina nekārtību skaitu par augstākais 2. Tiešām, ņemot grāmatas no sākuma vai beigām, mēs likvidējam 1 nekārtību; ņemot tās no vidus, mēs noteikti radām vienu nekārtību. Tātad nepieciešami vismaz 4 gājieni.

Tagad parādīsim, ka *neviens* gājiens nesamazina nekārtību skaitu par vairāk nekā 2. Tiešām, pieņemsim, ka kāds gājiens samazina nekārtību skaitu par 3. Tas iespējams tikai tad, ja pie grāmatu izņemšanas tiek likvidētas 2 nekārtības un pie ievietošanas - 1 nekārtība, pie tam jaunas nekārtības nerodas. Skaidrs, ka tā nenotiek, ja grāmatas ņem no sākuma vai no beigām vai arī novieto sākumā vai beigās. Aplūkosim gājienu, kad grāmatas ņem "no vidus" un novieto "vidū":



12. zīm.

Lai notiktu mums vajadzīgais, jābūt a<b, c<d, a>d, e<f, e>b, c>f. Bet šīs nevienādības ir pretrunīgas: a<b<e<f<c<d<a. Tātad arī ar šādu gājienu nevar samazināt nekārtību skaitu par 3. Tātad nepieciešami vismaz 5 gājieni.

Apskatot visas iespējas pirmajam gājienam (vai grāmatas ņem no gala vai no vidus un vai tās novieto galā vai vidū), viegli iegūt, ka pirmais gājiens samazina nekārtību skaitu par ≤ 1 . Simetrijas pēc tas pats attiecas uz pēdējo gājienu. Bez šiem diviem gājieniem jālikvidē vēl ≥ 7 nekārtības; saskaņā ar iepriekšējo tam nepieciešami ≥ 4 gājieni. Tātad kopā nepieciešami vismaz 6 gājieni.

Tāpēc der y=5. Skaidrs, ka rezultāts x=6; y=5 nav uzlabojams.

A. Andžāns