Latvijas 52. matemātikas olimpiādes 3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Par naturāliem skaitļiem x un y zināms, ka $30<x<40<y<50$ un xy ir kāda vesela skaitļa kubs. Kādas ir x un y vērtības?

2. Šaurleņķu trijstūrī ABC augstumi krustojas punktā H. Nogrieznis BD ir ΔABC apvilktās riņķa līnijas diametrs. Pierādīt, ka AHCD ir paralelograms.

3. No regulāra 100-stūra virsotnēm 10 nokrāsotas baltas, bet citas 10 - sarkanas. Pierādiet, ka eksistē 2 vienādi nogriežņi, no kuriem vienam abas virsotnes ir baltas, bet otram abas virsotnes ir sarkanas.

4. Ar kvadrāttrinomu ax^2+bx+c atļauts izdarīt šādas operācijas, ja vien to rezultātā atkal iegūst kvadrāttrinomu:

- mainīt vietām koeficientus a un c,
- mainīgo x aizstāt ar $x+t$, kur t - patvaļīgs reāls skaitlis (piemēram trinomā x^2+x+1 aizstājot x ar $x+1$, iegūs $(x+1)^2+(x+1)+1$ jeb x^2+3x+3).

Vai ar šādām operācijām (atkārtojot tās, ja vajadzīgs, vairākas reizes) no trinoma x^2+x-1 var iegūt

a) trinomu x^2-x-1,
b) trinomu x^2+x+2,
c) trinomu x^2-4x+3?

5. Kvadrāts ABCD sastāv no 7×7 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Šodien dažās no tām apmetās pa vienam rūķītim. Veselu gadu katras turpmākās dienas rītā katrs rūķītis pārcelsies uz rūtiņu, kurai ar viņa iepriekšējās dienas mitekli ir kopīga mala. Turklāt, ja kāds rūķītis vienā rītā pārvietosies paralēli AB, tad nākošajā rītā viņš pārvietosies paralēli BC, un otrādi: ja kāds rūķītis vienā rītā pārvietosies paralēli BC, tad nākošajā rītā viņš pārvietosies paralēli AB. Vai var gadīties, ka nekādi divi rūķīši nekad vienlaicīgi nedzīvos vienā rūtiņā, ja rūķīšu skaits ir

a) 36, **b)** 37?

10. klase

1. Regulāra 1000-stūra virsotnes sākotnēji ir baltas. Kādu mazāko daudzumu no tām var nokrāsot melnas tā, lai nepaliktu neviens a) kvadrāts, b) taisnstūris ar visām virsotnēm baltās 1000-stūra virsotnēs?

2. Dots, ka $0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{2002}$ un $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2002} = 1$. Pierādīt: ja n - naturāls skaitlis un $1 \le n \le 2002$, tad $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \dfrac{1}{2002}$.

3. Vai kvadrātu, kura malas garums ir 5 cm, var pilnībā pārklāt ar trim kvadrātiem, kuru malu garumi katram ir 4 cm? ("Mazie" kvadrāti drīkst daļēji pārklāties viens ar otru).

4. Kādiem naturāliem skaitļiem n skaitlis $n\cdot2^{n-1}$ ir naturāla skaitļa kvadrāts?

5. Uz tāfeles sākotnēji pa reizei uzrakstīti veselie skaitļi no 0 līdz 1024 ieskaitot. Spēlētāji A un B spēlē sekojošu spēli. Vispirms A nodzēš $2^9=512$ skaitļus. Pēc tam B nodzēš $2^8=256$ skaitļus. Pēc tam A nodzēš $2^7=128$ skaitļus. Pēc tam B nodzēš $2^6=64$ skaitļus utt., kamēr ar pēdējo gājienu B nodzēš $2^0=1$ skaitli. Uz tāfeles paliek divi skaitļi; apzīmēsim tos ar x un y. Spēlētājs A vēlas, lai $|x-y|$ būtu iespējami liels; B vēlas, lai $|x-y|$ būtu iespējami mazs. Cik lielu $|x-y|$ vērtību A var sasniegt?

Latvijas 52. matemātikas olimpiādes 3. kārtas uzdevumi

11. klase

1. Kuģa komandā ir 12 matroži un kapteinis. Komandas vidējais vecums ir par 1 gadu lielāks nekā matrožu vidējais vecums. Par cik kapteiņa vecums ir lielāks nekā matrožu vidējais vecums?

2. Vienā kaudzītē ir m konfektes, otrā - n konfektes. Ar vienu gājienu var vai nu apēst vienu konfekti, vai apēst pa vienai konfektei no katras kaudzītes, vai arī pārlikt vienu konfekti no vienas kaudzītes uz otru. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Andris un Juris izdara pa vienam gājienam pēc kārtas; pirmais iet Andris. Kurš uzvar, pareizi spēlējot?

3. Ap četrstūri ABCD var apvilkt riņķa līniju.

a) katra virsotne ar taisnes nogriezni savienota ar pārējo triju virsotņu veidotā trijstūra mediānu krustpunktu. Pierādīt, ka visi četri šādi nogriežņi iet caur tā nogriežņa viduspunktu, kas savieno ABCD diagonāļu viduspunktus,

b) pierādīt, ka minētie 4 mediānu krustpunkti atrodas uz vienas riņķa līnijas.

4. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta 0 vai 1 tā, lai katrā rindā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis. Cik ir dažādu kvadrāta aizpildījumu ar šādu īpašību? (Divi aizpildījumi skaitās dažādi, ja tie atšķiras kaut vienā rūtiņā).

5. Kuriem naturāliem skaitļiem n, kas lielāki par 3 un nedalās ar 3, izpildās īpašība: visi tie naturālie skaitļi, kas mazāki par n un kuru lielākais kopīgais dalītājs ar n ir 1, veido aritmētisku progresiju?

12. klase

1. Ja a un b - naturāli skaitļi, tad ar (a,b) apzīmējam a un b lielāko kopīgo dalītāju. Atrast lielāko iespējamo $(4n+3, 6n+1)$ vērtību, ja n - naturāls skaitlis.

2. Dots, ka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{24} + \ldots + \frac{x_n}{n \cdot 2^n} \geq 1 - \frac{1}{2^n}$.

3. Uz galda atrodas 1001 viena lata monētas. Katrai no tām uz augšu var būt vai nu ģerbonis, vai lasis. Tiek izdarīti 1000 gājieni. Ar n-to gājienu (n=1;2;3;…;1000) izvēlas n monētas un apgriež tās otrādi. Pierādīt:

a) var panākt, lai pēc visu gājienu izdarīšanas visas monētas būtu ar vienu un to pašu pusi uz augšu,

b) to, vai monētas būs ar ģerboni vai lasi uz augšu, viennozīmīgi nosaka monētu sākotnējais novietojums.

4. Punkts C ir nogriežņa AB iekšējs punkts. Vienādmalu trijstūri ACB_1 un CBA_1 atrodas uz vienu pusi no taisnes AB, bet vienādmalu trijstūris ABC_1 - uz otru pusi. Taisnes AA_1 un BB_1 krustojas punktā S. Pierādīt, ka

a) $\angle B_1SA=60°$,

b) punkti S, C un C_1 atrodas uz vienas taisnes.

5. Funkcijas f definīcijas apgabals ir kopa A={1;2;3;…;12;13}, un šī funkcija pieņem katru vērtību no kopas A. Funkcijas $f(f(x))$ vērtības attēlotas tabulā:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(f(x))$	10	9	12	8	13	3	4	1	5	11	6	2	7

Atrodiet visas iespējamās funkcijas f un pierādiet, ka citu bez jūsu atrastajām nav. (**Piezīme**: atrast funkciju nozīmē uzrādīt tās vērtību tabulu.)