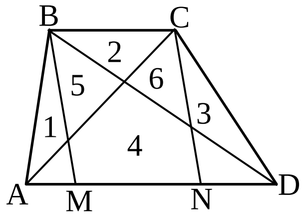
9.1. Pieskaitot pierādāmās vienādības L(1)+L(2)+L(3)=L(4) abām pusēm L(5)+L(6)+L(2), iegūstam ekvivalentu vienādību L(ABC)+L(DBC)=L(BCNM), kas acīmredzami izriet no trijstūra un paralelograma laukumu formulām $L=\frac{1}{2}ah$ un L=*ah*.



9.2. a) B=27, A=7·27=189, C=18927.

b) Var ņemt $B=\underbrace{270027002700...270027}_{n \text{ reizes } 27}$.

c) Apzīmēsim patvaļīga naturāla skaitļa X ciparu summu ar S(X). Tā kā $A=\underbrace{B+B+...+B}_{7 \text{ reizes}}$, tad, reizinot skaitli B ar 7, rodas pārnesumi(citādi būtu S(A)=7·S(B)). Tāpēc 2·S(B)=S(A)=7·S(B)-9·*k* (*k* – pārnesumu skaits). Iegūstam 5·S(B)=9·*k*, tātad S(B) dalās ar 9. Tāpēc S(C)=S(A)+S(B)=2S(B)+S(B)=3S(B) arī dalās ar 9; tāpēc C dalās ar 9.

d) nē. Piemēram, var ņemt B=117, A=819, C=819117.

9.3. Uzdevuma apgalvojums būs pierādīts, ja pierādīsim: katram bērnam ir nepāra skaits konfekšu.

Apzīmēsim bērniem esošo konfekšu skaitus, kā parādīts zīmējumā.

h a b
g c
f e d

Pēc dotā a+b+c, d+e+f, g+h+a ir nepāra skaitļi. Tad arī (a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+a) ir nepāra skaitlis; tas nozīmē, ka 2a+(b+c+d+e+f+g+h) ir nepāra skaitlis. Tātad (b+c+d)+(e+f+g)+h ir nepāra; tātad h ir nepāra. Līdzīgi pierāda, ka a; b; ...;g ir nepāra.

9.4. Apzīmēsim $a+b=n$. Tad $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2\geq n^2$, tāpēc $n^2\leq 2\cdot 2=4$ un $n=0;\ \pm1;\ \pm2$. Risinot vienādojumu sistēmas $\begin{cases} a+b=\pm 2 \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$, $\begin{cases} a+b=\pm 1 \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$, $\begin{cases} a+b=0 \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$, iegūstam meklētos pārus (1; 1), (-1; -1), (1; -1), (-1; 1), $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

9.5. Atbilde: 6 krāsas.

Risinājums. Nekādi 3 no 11 skaitļiem 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024 nevar būt nokrāsoti vienā krāsā. Tātad krāsu skaits ir vismaz 11:2=5,5, tātad vismaz 6.

Ar 6 krāsām var iztikt. Ievērosim, ka neviens no apskatāmajiem skaitļiem nesatur vairāk par 10 pirmreizinātājiem, jo 2^{11}=2048>2005. Krāsojam 1. krāsā vieninieku un pirmskaitļus; otrajā krāsā – divu un triju pirmskaitļu reizinājumus (varbūt reizinājumā pirmskaitļi atkārtojas), trešajā krāsā – četru un piecu pirmskaitļu reizinājumus, utt.

10.1. Viegli ievērot, ka ΔBCG iegūstams no ΔDCE, pagriežot to par 90° pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam. Tāpēc arī 1. trijstūra mediāna CM iegūstama no 2. trijstūra mediānas šajā pagriezienā. No tā seko vajadzīgais.

10.2. a) $x=1$; $y=-1$; $z=1000$; $t=1000$.

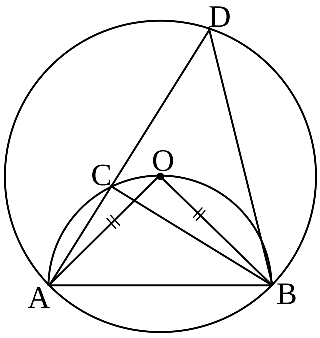
b) No dotā seko, ka $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$. Šī vienādība ekvivalenti pārveidojas par $(x+y)(x+z)(y+z)=0$. Ja $x=-y$, tad $x^3+y^3+z^3=z^3=1000^3$, $z=1000$, $t=(x+y)+z=1000$ un $x+y+z+t=2000$. Citas iespējas, kad $x+z=0$ vai $y+z=0$, apskata līdzīgi.

10.3. Tā kā $xf(x)+yf(y)$ un $xf(y)+yf(y)$ dalās ar $x+y$, tad arī starpība $x(f(y)-f(x))$ dalās ar $x+y$. Pie $y=x+1$ iegūstam, ka $x(f(x+1)-f(x))$ dalās ar $2x+1$ (x=1; 2; ...; 9). Tā kā LKD(x, $2x+1$)=1, tad $f(x+1)-f(x)$ dalās ar $2x+1$. Tā kā $f(t)$ ir augoša funkcija, tad $f(x+1)-f(x)\geq 2x+1$. Summējot šīs nevienādības pie x=1; 2; ...; 9, iegūstam

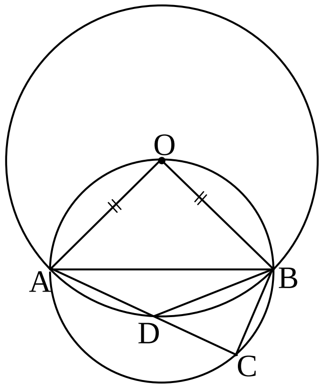
$$f(10)-f(1)\geq 3+5+\ldots+19=99.$$

Tā kā $f(10)\leq 100$ un $f(1)\geq 1$, tad $f(1)=1$ un $f(10)=100$. Bez tam $f(x+1)-f(x)=2x+1$ (x=1; ...; 9), no kurienes seko, ka $\boldsymbol{f(x)=x^2}$. Pārbaude parāda, ka šī funkcija der.

10.4. Šķirojam divus gadījumus atkarībā no tā, vai C un O pieder vienam un tam pašam vai dažādiem ΔAOB apvilktās riņķa līnijas lokiem.



$\angle$AOB=$\angle$ACB=$\angle$CDB+$\angle$DBC (ārējs leņķis). Bet $\angle CDB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\angle ACB$, tāpēc arī $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ACB$. No tā seko CD=CB.



Tagad $\angle BDA=180°-\frac{1}{2}\angle AOB=\angle DBC+\angle BCD$. Bet $\angle$BCD=180°-$\angle$AOB, tāpēc $180°-\frac{1}{2}\angle AOB=180°-\angle AOB+\angle DBC$, no kurienes $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle AOB$. Savukārt $\angle BDC=180°-\angle BDA=180°-\left(180°-\frac{1}{2}\angle AOB\right)=\frac{1}{2}\angle AOB$. Tātad $\angle$DBC=$\angle$BDC un CB=CD.

10.5. Apzīmējam profesorus ar P_1, P_2, ..., P_7. Klausītāju kopas var būt šādas:

P_1: P_2, P_3, P_4	P_4: P_2, P_6, P_7	P_6: P_1, P_3, P_7
P_2: P_3, P_5, P_6	P_5: P_1, P_4, P_6	P_7: P_1, P_2, P_5
P_3: P_4, P_5, P_7		

Ja n profesoriem prasītās kopas ir konstruētas, tad, pievienojot vēl vienu profesoru, kuru klausās visi iepriekšējie n, iegūstam „klausīšanās sistēmu” n+1 profesoriem. Tātad var būt n=8; 9; 10; ....

Pierādīsim, ka noteikti jābūt $n\geq 7$.

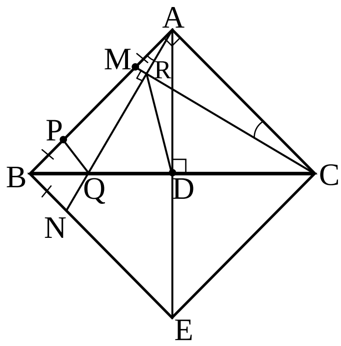
Vispirms pamatosim, ka katru klausās vismaz 3 citi profesori. Tiešām, ja profesoru A klausītos tikai B, tad neviens profesors neklausītos A un B; ja profesoru A klausītos tikai B un C, tad A un B varētu klausīties tikai C, bet A un C – tikai B, tātad B un C klausītos viens otru – pretruna.

Tātad ir vismaz $n\cdot 3$ pāri (A, B) ar īpašību „A klausās B lekcijas”. No otras puses, šādu pāru nav vairāk par $\frac{n(n-1)}{2}$, jo nav divu profesoru, kas klausītos viens otru. Tāpēc $3n\leq\frac{1}{2}n(n-1)$, no kurienes n-1≥6 un $n\geq 7$.

11.1. Viegli pārbaudīt, ka der visi skaitļi $10n+\frac{13}{10}$, n=0; 1; 2; ....

Tiešām, $\left(10n+\frac{13}{10}\right)^2=100n^2+26n+1{,}69$, tāpēc $\left\{\left(10n+\frac{13}{10}\right)^2\right\}=0{,}69$ un $\left\{10n+\frac{13}{10}\right\}=0{,}3$.

11.2. Papildinām ΔABC līdz kvadrātam ABEC. Apzīmējam AQ krustpunktu ar BE ar N.



a) Tā kā $\angle$ACM=$\angle$BAN, tad ΔACM=ΔBAN (*hl*). Tāpēc BN=AM=BP. Tāpēc ΔPBQ=ΔNBQ (*mlm*). Tāpēc $\angle$PQB=$\angle$NQB=$\angle$AQC.

b) Tā kā ΔADQ~ΔCRQ, tad $\frac{\text{DQ}}{\text{RQ}}=\frac{\text{AQ}}{\text{CQ}}$. No šejienes seko, ka ΔDRQ~ΔACQ. Tāpēc $\angle$DRQ=$\angle$ACQ=45°.

11.3. Apzīmējam $2^x=y$ un iegūstam

$$y^2-(a^2+3a-2)y+3a^3-2a^2=0,\ y>0.$$

Vienādojumu tālāk pārveido par $(y-a^2)(y-3a+2)=0$.

Pie a=0 pozitīvu sakņu nav. Pie $a\neq0$ ir pozitīva sakne $y_1=a^2$. Otrā sakne $y_2=3a-2$. Mūs apmierina nosacījumi $y_2\leq0$ vai $y_2=y_1$. Iegūstam, ka meklējamās a vērtības ir $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\{1;2\}$.

11.4. Ja p=2, tad ievērojam: $x^2+x=x(x+1)$ ir pāra skaitlis, tāpēc abi apgalvojumi ir aplami.

Ja p=3, ievērojam, ka 2^2+2+3 dalās ar 3 un 1^2+1+25 dalās ar 3, tātad abi apgalvojumi ir patiesi.

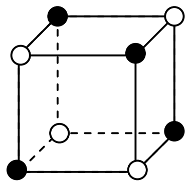
Pieņemam, ka $p>3$.

Ja $a^2+a+3\vdots p$, tad arī $9a^2+9a+27\vdots p$. Bet $9a^2+9a+27=(3a+1)^2+(3a+1)+25$. Tātad, ja patiess ir pirmais apgalvojums, tad patiess ir arī otrais.

Ja $b^2+b+25\vdots p$, tad arī $(b+p)^2+(b+p)+25\vdots p$ un $(b+2p)^2+(b+2p)+25\vdots p$. Ievērojam, ka skaitļi b, $b+p$ un $b+2p$ dod dažādus atlikumus, dalot ar 3, jo $p>3$. Tātad viens no tiem ir formā $3c+1$, $c\in$ Z. Iegūstam, ka $(3c+1)^2+(3c+1)+25\vdots p$ jeb $9(c^2+c+3)\vdots p$. Tā kā $p>3$, no šejienes seko, ka $c^2+c+3\vdots p$. Tātad, ja patiess ir otrais apgalvojums, tad patiess ir arī pirmais.

11.5. Atbilde: to var izdarīt tad un tikai tad, ja vieninieki nav kuba vienas skaldnes pretējās virsotnēs.

- Ja vieninieki ir kuba diagonāles galapunktos, izdarām divus gājienus, izvēloties par X vispirms vienu, bet pēc tam otru no šiem galapunktiem.
- Ja vieninieki ir kuba šķautnes galapunktos, izdarām divus gājienus, izvēloties par X šiem galapunktiem pretējās kuba virsotnes.
- Ja vieninieki sākotnēji atrodas kuba skaldnes diagonāles pretējos galos, tad sākumā starpība starp melnajās un baltajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summām ir 2. Tā kā ar katru gājienu viena no šīm summām palielinās par 3, bet otra nemainās, tad tās nekad nevar kļūt vienādas.

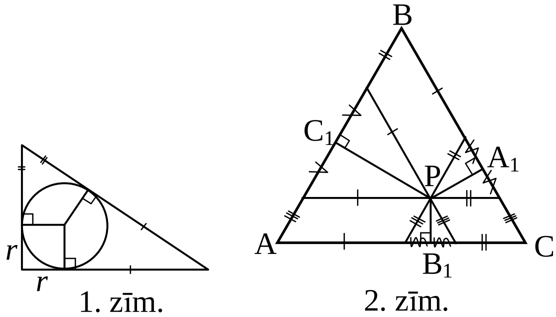


12.1. Pieņemsim no pretējā, ka $x \geq y$. Tad $13^x \geq 13^y$ un $5^x \geq 5^y$. No $3^x+13^y=17^x$ seko, ka $3^x+13^x \geq 17^x$ jeb $\left(\frac{3}{17}\right)^x+\left(\frac{13}{17}\right)^x \geq 1$. No eksponentfunkcijas īpašībām seko, ka $x<1$. Savukārt no $5^x+7^y=11^y$ līdzīgi iegūstam, ka $5^y+7^y \leq 11^y$, $\left(\frac{5}{11}\right)^y+\left(\frac{7}{11}\right)^y \leq 1$ un $y>1$. Nevienādības $x<1<y$ ir pretrunā ar sākotnējo pieņēmumu.

12.2. No labi zināmas taisnleņķa trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiusa garuma formulas $r=\frac{a+b-c}{2}$ (skat. 1. zīm.) iegūstam, ka pierādāmā vienādība ekvivalenta ar

$$AC_1+BA_1+CB_1=C_1B+A_1C+B_1A \text{ (2. zīm.).}$$

Savukārt šīs vienādības pareizība kļūst acīmredzama, ja caur P novelk taisnes paralēli ABC malām.



1. zīm. 2. zīm.

12.3. a) Kaut kur uz riņķa līnijas ir 1, kaut kur n. Apskatām vienu no lokiem, kas „savieno” šos skaitļus. Ja uz tā atrodas vēl skaitļi x_1; x_2; ...; x_k, tad summa uz šī loka ir

$$|x_1-1|+|x_2-x_1|+...+|n-x_k| \geq |x_1-1+x_2-x_1+...+n-x_k|=n-1.$$

Līdzīgi spriežam par otru loku. Tātad visa apskatāmā summa nav mazāka par $2(n-1)$. Summu $2(n-1)$ iegūstam, izrakstot skaitļus pa riņķa līniju pēc kārtas.

b) ja pēc kārtas uzrakstītie skaitļi ir x_1, x_2, ..., x_n, tad apskatāmā summa ir

$$S=|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\ldots+|x_{n-1}-x_n|+|x_n-x_1|.$$

Tā kā $|a|=\pm a$, tad S sastāv no $2n$ saskaitāmajiem, no kuriem n ir ar „+” zīmi un n ar „–” zīmi.

Ja n – pāra skaitlis, tad S būs vislielākā, ja tā saturēs $\frac{n}{2}+1$; $\frac{n}{2}+2$; ...; n katru divas reizes ar „+” zīmi, bet 1; 2; ...; $\frac{n}{2}$ katru divas reizes ar „–” zīmi. Tad summa būtu $\frac{n^2}{2}$. Šādu summu var sasniegt, izrakstot skaitļus secībā 1; n; 2; n-1; ...; $\frac{n}{2}$; $\frac{n}{2}+1$.

Ja n – nepāra skaitlis, tad S būs vislielākā, ja n; n-1; n-2; ...; $\frac{n+3}{2}$ katrs būs divas reizes ar „+” zīmi, 1; 2; 3; ...; $\frac{n-1}{2}$ katrs būs divas reizes ar „–” zīmi, bet $\frac{n+1}{2}$ būs vienu reizi ar „+” zīmi, bet otru reizi ar „–” zīmi. Tad summa būtu $\frac{n^2-1}{2}$. Šādu summu var sasniegt, izvēloties secību 1; n; 2; n-1; ...; $\frac{n+3}{2}$; $\frac{n+1}{2}$.

12.4. Acīmredzami, visi virknes locekļi ir pozitīvi. Tāpēc $x_{2n}>1$, bet $x_{2n+1}<1$ ($n\in$ N, $n\geq 1$). No šejienes seko, ka vienādi varētu būt tikai divi locekļi ar vienādas paritātes indeksiem, kas pie tam lielāki par 1. Viegli saprast, ka no $x_k=x_m$ seko $x_{k-1}=x_{m-1}$ pie nepāra indeksiem k un m vai $x_{\frac{k}{2}}=x_{\frac{m}{2}}$ pie pāra indeksiem k un m utt., kas galu galā noved pie pretrunas (kad viens no locekļiem šajā vienādībā kļūst x_1).

Tagad pierādīsim, ka katrs pozitīvs racionāls skaitlis sastopams šajā virknē.

Pierādīsim to ar matemātisko indukciju pēc k, $k\geq 2$, tādiem pozitīviem nesaīsināmiem racionāliem skaitļiem r, ka $r=\frac{a}{b}$, un $a+b=k$. Pie $k=2$ ir tikai viens tāds skaitlis $r=\frac{1}{1}=1$, un $x_1=1$. Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs pie $k=2; 3; ...; t$, un apskatīsim $r=\frac{a}{b}$, LKD(a, b)=1, $a+b=t+1$. Skaidrs, ka $r\neq 1$. Šķirojam divus gadījumus:

- $r>1$. Apskatām skaitli $r_1=\frac{a-b}{b}$. Tā kā LKD(a-b, b)=LKD(a, b)=1 un $a-b+b=a\leq t$, tad eksistē tāds n, ka $x_n=\frac{a-b}{b}$. Bet tad $x_{2n}=1+x_n=\frac{a}{b}$, k.b.j.
- $0<r<1$. Apskatām skaitli $r_2=\frac{b-a}{a}$. Tā kā LKD(b-a, a)=LKD(b, a)=1 un $b-a+a=b\leq t$, tad eksistē tāds n, ka $x_n=\frac{b-a}{a}$. Tad $x_{2n}=1+x_n=\frac{b}{a}$ un $x_{2n+1}=\frac{1}{x_{2n}}=\frac{a}{b}$, k.b.j.

12.5. Apzīmēsim krāsas ar 0; 1; 2. Pierādīsim vispirms divas lemmas.

Lemma 1. Ja trīs no četrām sekojošām virsotnēm ir vienā krāsā, tad var panākt , lai tās visas būtu ceturtās virsotnes krāsā, nemainot citu virsotņu krāsojumu.

Pietiek apskatīt divus gadījumus:

1110→1122→1002→2202→2112→0012→0000;

1011→1221→0021→0000

Lemma 2. Jebkuras četras sekojošas virsotnes var nokrāsot vienā krāsā.

Sadalām virsotnes divos blakus virsotņu pāros un panākam, lai katrā pārī krāsas būtu vienādas. Ja tās visas vienādas, viss OK. Pretējā gadījumā rīkojamies pēc shēmas

1122→1002→2202→2112→0012→0000.

Saskaņā ar 2.lemmu var panākt, lai $A_1A_2A_3A_4$ būtu vienā krāsā, pieņemsim 0, un arī $A_5A_6A_7A_8$ būtu vienā krāsā. Ja arī $A_5A_6A_7A_8$ ir krāsā 0, nogaidām. Ja nē, apskatām $A_4A_5A_6A_7$. Pēc 1. lemmas varam panākt, ka $A_4A_5A_6A_7$ ir krāsā 0. Līdzīgi pievienojot pa 3 virsotnēm, iegūstam, ka $A_1A_2...A_{997}$ ir krāsā 0. Apskatām $A_{998}A_{999}A_{1000}A_1$. Pārkrāsojam tās vienā krāsā (2. lemma). Ja tā ir krāsa 0, viss kārtībā. Pieņemsim, ka tā ir krāsa 1. Apskatām $A_{997}A_{998}A_{999}A_{1000}$ un saskaņā ar 1. lemmu pārkrāsojam tās krāsā 0. Tagad A_1 ir krāsā 1, citas virsotnes krāsā 0. Tagad pakāpeniski pārkrāsojam krāsā 1 virsotnes $A_2A_3A_4$; $A_5A_6A_7$; ...; $A_{998}A_{999}A_{1000}$, lietojot 1.lemmu.

Ievērosim, ka pieļautie gājieni 01→22; 10→22; 02→11; 20→11; 12→00; 21→00 saglabā visu numuru summas atlikumu, dalot ar 3. Bet šis atlikums vienāds ar galā iegūtās krāsas numuru, jo $1000x\equiv x$ (mod 3). No šejienes seko otrais apgalvojums.