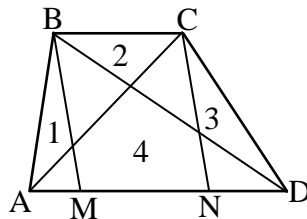


Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Uz trapeces ABCD garākā pamata AD ņemti tādi divi iekšēji punkti M un N, ka $BM \parallel CN$. Pierādīt, ka daļu 1, 2 un 3 laukumu summa vienāda ar daļas 4 laukumu (skat. 1.zīm.).

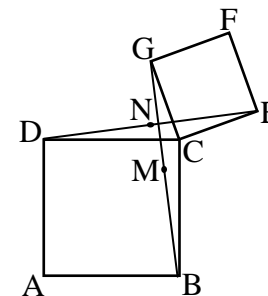


1. zīm.

2. Dots, ka B – naturāls skaitlis, $A=7 \cdot B$ un A ciparu summa divas reizes lielāka par B ciparu summu. Skaitli C iegūst, pierakstot skaitlim A galā skaitli B .
- atrast kaut vienu šādu C ,
 - pierādīt, ka šādu C ir bezgalīgi daudz,
 - pierādīt, ka katrs šāds C dalās ar 9,
 - vai C noteikti dalās ar 27?
3. Ap galdu sēž 8 bērni. Katriem trīs pēc kārtas sēdošiem bērniem kopā ir nepāra skaits konfekšu. Pierādīt, ka katram bērnam ir vismaz viena konfekte.
4. Dots, ka a un b – tādi reāli skaitļi, ka $a+b$ ir vesels skaitlis un $a^2+b^2=2$. Atrast visus šādus a un b pārus un pierādīt, ka citu bez Jūsu atrastajiem nav.
5. Katrs naturāls skaitlis no 1 līdz 2005 ieskaitot nokrāsots vienā no n krāsām. Ir zināms: ja a , b un c ir dažādi skaitļi, a dalās ar b un b dalās ar c , tad a , b un c nav visi nokrāsoti vienā un tai pašā krāsā. Atrast mazāko iespējamo n vērtību.

10. klase

1. Dots, ka ABCD un CEFG ir kvadrāti, M ir BG viduspunkts un N ir DE viduspunkts (skat. 2. zīm.). Pierādīt, ka nogriežņi CM un CN ir savā starpā vienādi un perpendikulāri.



2. zīm.

2. Dots, ka x , y , z un t ir reāli skaitļi, no kuriem neviens nav 0. Zināms, ka $x+y+z=t$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t}$ un $x^3+y^3+z^3=1000^3$.
- atrast kaut vienu šādu x , y , z , t komplektu,
 - aprēķināt $x+y+z+t$.
3. Kādām funkcijām f vienlaicīgi piemīt sekojošas īpašības:
- f definīcijas apgabals ir $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$,
 - f vērtības ir naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100,
 - f ir augoša funkcija,
 - visiem x un y no definīcijas apgabala skaitlis $x \cdot f(x) + y \cdot f(y)$ dalās ar $x+y$?
4. Uz riņķa līnijas w ar centru O izvēlēti divi punkti A un B tā, ka AB nav diametrs. Uz trijstūrim OAB apvilkta riņķa līnija izvēlēts punkts C , kas nesakrīt ne ar A , ne ar B . Taisne AC krusto w punktos A un D . Pierādiet, ka DCB ir vienādsānu trijstūris.
5. Kādā universitātē strādā n profesori, $n \geq 2$. Katrs profesors lasa lekcijas. Daži no viņiem klausās citu profesoru lekcijas. Ir zināms, ka
- neviens neklausās savas lekcijas,
 - ja A klausās B lekcijas, tad B neklausās A lekcijas,
 - ja A ir profesors un B ir profesors, tad var atrast tādu profesoru C , kas klausās gan A lekcijas, gan B lekcijas.
- Pierādiet: var gadīties, ka $n=7$.
 - Kādas vēl var būt n vērtības?

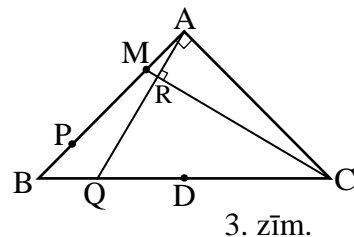
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes

3. kārtas uzdevumi

11. klase

- Ar $\{x\}$ apzīmē starpību starp x un lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x . Piemēram, $\{1,6\}=0,6$; $\{3\}=0$, $\{-0,8\}=0,2$.
 a) atrast kaut vienu tādu racionālu skaitli x , ka $\{x^2\}+\{x\}=0,99$,
 b) pierādīt, ka šādu racionālu x ir bezgalīgi daudz.

- Dots, ka ABC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, $AB=AC$. Uz AB ņemti tādi iekšēji punkti P un M , ka $AM=BP$. Ar D apzīmējam BC viduspunktu. Punkts R atrodas uz CM un punkts Q atrodas uz BC . Ir zināms, ka A, R, Q ir uz vienas taisnes un $AQ \perp CM$ (skat. 3. zīm.).



- Pierādīt, ka
- $\angle AQC = \angle PQB$;
 - $\angle DRQ = 45^\circ$.

- Kādām a vērtībām vienādojumam

$$4^x - (a^2 + 3a - 2) \cdot 2^x + 3a^3 - 2a^2 = 0$$

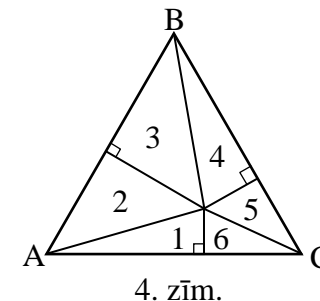
ir viens vienīgs atrisinājums reālos skaitļos?

- Dots, ka p – pirmskaitlis. Pierādīt, ka apgalvojumi „eksistē tāds vesels x , ka x^2+x+3 dalās ar p ” un „eksistē tāds vesels y , ka y^2+y+25 dalās ar p ” vai nu abi ir pareizi, vai abi – nepareizi.
- Apskatām kubu, kura divās virsotnēs ierakstīts 1, bet citās virsotnēs ierakstītas nulles. Ar vienu gājienu var izvēlēties vienu virsotni X un pieskaitīt vieninieku skaitļiem tajās 3 virsotnēs, ko ar X savieno šķautne. Atkārtojot šādus gājienu, jāpanāk, lai skaitļi visās kuba virsotnēs kļūtu vienādi. Kuriem sākotnējiem vieninieku izvietojumiem to var izdarīt?

12.klase

- Dots, ka x un y ir reāli skaitļi, $3^x + 13^y = 17^x$ un $5^x + 7^y = 11^y$. Pierādīt, ka $x < y$.

- No punkta regulāra trijstūra ABC iekšpusē vilkti perpendikuli pret tā malām. Šis punkts savienots arī ar trijstūra virsotnēm. Iegūtajos 6 taisnleņķa trijstūros ievilkta riņķa līnijas. Apzīmēsim i -tajā trijstūrī ievilktais riņķa līnijas rādiusu ar r_i (skat. 4. zīm.).



Pierādīt, ka $r_1 + r_3 + r_5 = r_2 + r_4 + r_6$.

- Pa riņķa līniju izrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz n ieskaitot, katrs vienu reizi. Katrām diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem atrodam to starpības absolūto vērtību. Atrast šo absolūto vērtību summas mazāko un lielāko iespējamo vērtību.

- Par skaitļu virkni x_1, x_2, x_3, \dots zināms, ka

- $x_1 = 1$
- $x_{2n} = 1 + x_n$ visiem naturāliem n
- $x_{2n+1} = \frac{1}{x_{2n}}$ visiem naturāliem n .

- Pierādiet, ka visi virknes locekļi ir dažādi.
- Kuri skaitļi ir šīs virknes locekļi?

- Katra no regulāra 1000-stūra virsotnēm nokrāsota balta, sarkana vai zaļa. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divas blakus esošas virsotnes, kas nokrāsotas dažādās krāsās, un pārkrāsot tās abas trešajā krāsā. Pierādiet, ka

- var panākt, lai visas virsotnes būtu nokrāsotas vienā un tai pašā krāsā,
- šī „beigu krāsa” viennozīmīgi atkarīga no sākotnējā krāsojuma.