

9.1. Viens no skaitļiem  $x$  un  $y$  ir pāra, otrs – nepāra. Skaitļa 640000 nepāra dalītāji ir 1; 5; 25; 125; 625. Ievērojam, ka  $640000 = 5^4 \cdot 2^{10}$ . Tāpēc  $1025 - 1 = 1024 = 2^{10}$ ,  $1025 - 25 = 1000$  un  $1025 - 625 = 400$  ir skaitļa 640000 dalītāji, bet  $1025 - 5 = 520 = 13 \cdot 5 \cdot 8$  un  $1025 - 125 = 900$  nav.

**Atbilde.** (1; 1024), (25; 1000), (400; 625), (625; 400), (1000; 25), (1024; 1).

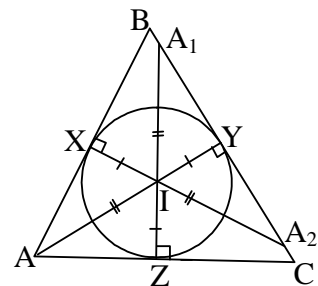
9.2. **Pirmais atrisinājums.** Tā kā intervālā  $(0; 1)$  atrodas tikai viena no kvadrātvienādojuma  $f(x) = 0$  saknēm, tad abas vērtības  $f(0)$  un  $f(1)$  reizē nevar būt pozitīvas. Tāpēc  $f(0) \cdot f(1) \leq 0$ . Iegūstam  $q(p + q + 1) \leq 0$  jeb  $q^2 + pq + q \leq 0$ , jeb  $f(q) \leq 0$ .

**Otrais atrisinājums.** Pieņemsim, ka vienādojuma  $f(x) = 0$  saknes ir  $x_1$  un  $x_2$ . Saskaņā ar Vjeta teorēmu

$$f(q) = q^2 + pq + q = x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = x_1 x_2 (x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1) = [x_1(1 - x_1)] \cdot [x_2(1 - x_2)].$$

Saskaņā ar uzdevumā doto tieši viena no kvadrātiekvāēm ir negatīva, tāpēc to reizinājums ir  $\leq 0$ .

9.3. Apzīmējam ievilktais riņķa līnijas pieskaršanās punktus  $\triangle ABC$  malām ar  $X$ ;  $Y$ ;  $Z$  (skat. 1. zīm.) Taisnleņķa trijstūri  $AXI$ ,  $AZI$ ,  $A_1YI$  un  $A_2YI$  ir vienādi savā starpā (hk), tāpēc  $A_1A_2 = AX + AZ$ . Līdzīgi  $B_1B_2 = BX + BY$  un  $C_1C_2 = CY + CZ$ . Saskaitot šīs vienādības, iegūstam vajadzīgo.



1. zīm.

9.4. Ja uzdevumus apzīmējam ar  $A$ ;  $B$ ;  $C$ ;  $D$ ;  $E$ ;  $F$ ;  $G$ ;  $H$ , tad 8 skolēniem var iedot komplektus  $ABC$ ;  $ADE$ ;  $AFG$ ;  $BDG$ ;  $BFH$ ,  $CDH$ ,  $CEF$ ,  $EGH$ . Tātad var būt 8 skolēni.

Ja kādu uzdevumu iedalītu  $\geq 4$  skolēniem, tad katram no tiem jāsaņem vēl 2 citi uzdevumi, un pavisam būtu vismaz  $1 + 4 \cdot 2 = 9$  uzdevumi – pretruna. Tātad katru uzdevumu iedeva augstākais 3 skolēniem, un pavisam tika iedoti augstākais  $8 \cdot 3 = 24$  uzdevumu teksti. Tā kā katrs skolēns saņēma trīs tekstus, tad skolēnu nav vairāk par  $24 : 3 = 8$ .

9.5. **Atbilde:** 8l; 7l; 6l; 5l; 4l; 3l; 2l; 1l; 0l.

**Risinājums.** To, ka minētā atbilde apmierina uzdevuma nosacījumus, pārbauda tieši. Pierādīsim, ka tā ir vienīgā. Tā kā pēc viena „cikla” ūdens sadalījums ir sākotnējais, mēs varam iztēloties, ka process notiek bezgalīgi un ir periodisks. Apskatīsim šajā bezgalīgajā periodiskajā procesā deviņu vienu otrai sekojošu pārliešanu virkni, kas sākas ar ūdens izliešanu no tā trauka  $T$ , kurā ir **vismazākais** procesa gaitā no trauka izlejama ūdens daudzums; apzīmēsim šo daudzumu ar  $8x$ . Saskaņā ar šo izvēli traukā  $T$  astoņās nākošajās liešanās tiks ielieti vismaz ūdens daudzums  $x$  katrā reizē.

Tā kā traukā  $T$  astoņās nākošajās liešanās kopā ielies ūdens daudzumu  $8x$ , tad **katrā** no šīm 8 liešanām traukā  $T$  ielies ūdens daudzumu  $x$ . Tātad **katrā** traukā tai brīdī, kad no tā izlej ūdeni, ir ūdens daudzums  $8x$ . No tā iegūstam, ka ūdens daudzums sākotnēji ir  $8x$ ;  $7x$ ;  $6x$ ;  $5x$ ;  $4x$ ;  $3x$ ;  $2x$ ;  $x$ ;  $0$ . Tā kā  $8x + 7x + \dots + x + 0 = 36$ , iegūstam  $x = 1$ , no kā seko uzdevuma atbilde.

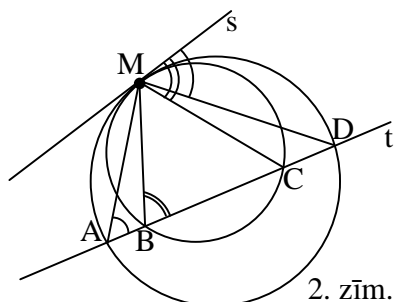
10.1. Ja kādai kompānijai būtu mazāk par 9 birojiem, tad tā nevarētu noorganizēt vairāk par 28 reisiem, jo no 8 elementiem var izveidot ne vairāk kā 28 pārus. Tātad katrai kompānijai ir vismaz 9 biroji, un biroju kopskaits ir vismaz  $9 \cdot 90 = 810$ . Tā kā  $810 > 8 \cdot 100$ , tad starp 100 pilsētām ir jābūt tādai, kurā ir vairāk nekā 8, tātad vismaz 9 biroji.

10.2. Skaidrs, ka  $p \neq 2$ ,  $q \neq 2$ ,  $p \neq 3$ . Ja  $p = 3k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tad  $p + 10$  nav pirmskaitlis. Tāpēc  $p = 3k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Ja  $q = 3m + 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , tad  $p + q + 1 = 3(k + m + 1)$  nav pirmskaitlis. Ja  $q = 3m + 2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , tad  $q + 10$  nav pirmskaitlis. Tāpēc  **$q = 3$** . Tad  $q + 4$  un  $q + 10$  tiešām ir

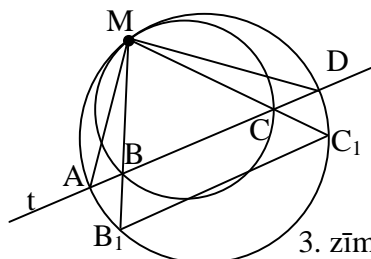
pirmskaitļi, un jāmeklē tādi pirmskaitļi  $p$  formā  $p = 3k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ka  $p + 4$ ,  $p + 6$ ,  $p + 10$  arī ir pirmskaitļi. Tieša pārbaude parāda, ka der tikai  $p = 7$ ,  $p = 13$ ,  $p = 37$ ,  $p = 97$ .

**10.3. 1. risinājums.** Speciālā gadījumā, ja  $M$  ir loka  $AMD$  viduspunkts, apskatām taisni  $l$ , kas iet caur  $M$  un abu riņķu centriem. Tā ir perpendikulāra taisnei  $t$ , tātad krusto gan nogriezni  $AD$ , gan nogriezni  $BC$  to viduspunktos. Tādā gadījumā  $\angle AMB = \angle DMC$ , jo šie leņķi ir viens otram simetriski attiecībā pret  $l$ .

Vispārīgā gadījumā (kas ietver arī speciālo), novelkam punktā  $M$  abu riņķa līniju kopējo pieskari  $s$  (skat. 2. zīm.) No ievilkto leņķu un hordas – pieskares leņķu īpašībām seko 2. zīm. atzīmētās leņķu vienādības. Redzams, ka  $\angle CMD = \angle C_1M D_1 - \angle C_1M B_1$  un  $\angle AMB = \angle MBC - \angle MAB$  (ārējā leņķa īpašība) =  $\angle C_1M D_1 - \angle C_1M B_1$ , tātad  $\angle CMD = \angle AMB$ .



2. zīm.



3. zīm.

**2. risinājums.** Pagarinām  $MB$  un  $MC$  līdz krustpunktiem  $B_1$  un  $C_1$  ar ārējo riņķa līniju (skat. 3. zīm.) Tā kā abas riņķa līnijas ir homotētiskas ar centru  $M$ , tad  $B_1$  un  $C_1$  ir atbilstoši punktu  $B$  un  $C$  attēli šajā homotētijā; tātad taisne  $B_1C_1$  ir taisnes  $BC$  attēls, tāpēc  $B_1C_1 \parallel BC$ . Tāpēc loki  $AB_1$  un  $C_1D$  ir vienādi, no kā seko uz tiem balstošos ievilkto leņķu vienādība.

**10.4.** Ievērojam, ka

$$S = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{4}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2004+\sqrt{2005}}} + \frac{1}{\sqrt{2005+\sqrt{2006}}} =$$

$$= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{2005}-\sqrt{2004}) + (\sqrt{2006}-\sqrt{2005}) =$$

$$= \sqrt{2006} - 1 \geq 43,7. \text{ Tā kā šajā summā katrs nākošais saskaitāmais mazāks par iepriekšējo, tad}$$

uzdevuma formulējumā minēto saskaitāmo summa ir lielāka par  $\frac{1}{2}S$ , tātad lielāka par 21,85.

**10.5. Atbilde:**  $n = 11$ .

Vispirms parādīsim, ka pie  $n = 10$  skaitļus var nokrāsot tā, lai minētā tipa atrisinājums neeksistētu. Piemēram, nokrāsojam 1; 2; 9; 10 baltus, bet 3; 4; 5; 6; 7; 8 – sarkanus. Katru trīs sarkano saskaitāmo summa ir vismaz  $3 \cdot 3 = 9$ , tātad nav sarkana. Savukārt katru trīs baltu saskaitāmo summa ir vismaz 11 (ja kāds no tiem ir 9 vai 10), vai no 3 līdz 6 (ja neviens no tiem nav ne 9, ne 10), tātad nav balta.

Tagad parādīsim, ka pie  $n = 11$  minētā tipa atrisinājums noteikti eksistē. To, ka skaitlis  $x$  ir balts resp. sarkans, pierakstīsim kā  $x \sim b$  resp.  $x \sim s$ . Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Šķirojam divus gadījumus.

- Skaitļi 1 un 2 ir vienā un tai pašā krāsā; varam pieņemt, ka  $1 \sim s$  un  $2 \sim s$ . Tā kā  $1 + 1 + 1 = 3$  un  $1 + 1 + 2 = 4$ , tad  $3 \sim b$  un  $4 \sim b$ . Tad  $3 + 3 + 3 = 9$ , tāpēc  $9 \sim s$ ; tā kā  $3 + 4 + 4 = 11$ , tad  $11 \sim s$ . Bet  $1 + 1 + 9 = 11$  pretruna.
- Skaitļi 1 un 2 ir dažādās krāsās; varam pieņemt, ka  $1 \sim s$  un  $2 \sim b$ . Tā kā  $1 + 1 + 1 = 3$ , tad  $3 \sim b$ . Tā kā  $2 + 2 + 2 = 6$ , tad  $6 \sim s$ ; tā kā  $2 + 3 + 3 = 8$ , tad  $8 \sim s$ . Bet  $1 + 1 + 6 = 8$  – pretruna.

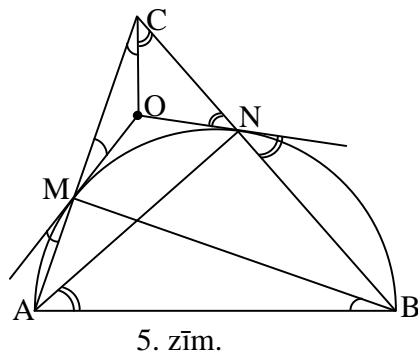
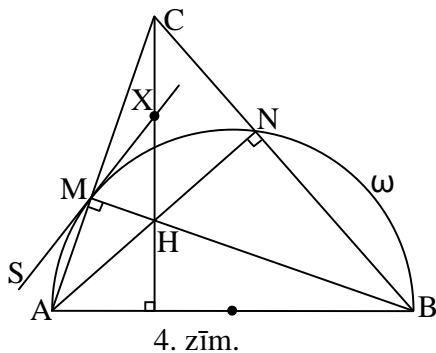
**11.1.** Attēlosim skolotājus ar  $m$  sarkaniem punktiem, bet skolnieku pārus – ar  $\frac{n(n-1)}{2}$  zaļiem punktiem. Ja kāds skolotājs māca abus kādā pāri ietilpstošos skolniekus, novilksim starp atbilstošajiem punktiem līniju. No katra sarkanā punkta iziet tieši  $\frac{a(a-1)}{2}$  līnijas, tāpēc līniju kopskaits ir  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot a \cdot (a-1)$ . No katra zaļā punkta iziet tieši  $b$  līnijas, tāpēc līniju kopskaits ir  $\frac{1}{2} \cdot b \cdot n \cdot (n-1)$ . No vienādības  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot a \cdot (a-1) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot n \cdot (n-1)$  seko vajadzīgais.

**11.2.** Pieskaitot abām dotās vienādības pusēm 1, iegūstam  $a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2$ . Tāpēc  $a_{2006} + 1 = (a_1 + 1)^{2^{2005}}$ . Tāpēc  $a_{2006} + 1 \geq 0$  un  $a_{2006} \geq -1$ . No otras puses, ja  $\alpha \geq -1$ , tad, izvēloties  $a_1 = \sqrt[2^{2005}]{\alpha + 1} - 1$ , iegūsim  $a_{2006} = \alpha$ . Tāpēc  $a_{2006}$  iespējamo vērtību kopa ir  $[-1; \infty)$ .

**11.3.** Vispirms atzīmēsim, ka naturāliem  $x$  un  $y$  pastāv nevienādība  $xy + 1 \geq x + y$ ; tiešām, tā ir ekvivalenta ar  $(x-1)(y-1) \geq 0$ , kas ir patiesība. Lai izpildītos  $(x+y)(xy+1) = 2^z$ , jābūt  $x + y = 2^a$ ,  $xy + 1 = 2^b$ , kur  $a$  un  $b$  – naturāli skaitļi; saskaņā ar iepriekšējo  $b \geq a$ . No tā, ka  $xy + 1$  dalās ar  $2^a$  un  $x + y$  dalās ar  $2^a$ , seko, ka arī  $x(x+y)$  dalās ar  $2^a$ ;  $(x^2 + xy) - (xy + 1)$  dalās ar  $2^a$ ;  $x^2 - 1$  dalās ar  $2^a$ ;  $(x+1)(x-1)$  dalās ar  $2^a$ .

Ievērosim, ka LKD( $x+1$ ;  $x-1$ ) ir vai nu 1, vai 2. Tāpēc vai nu viens no skaitļiem  $x+1$  un  $x-1$  dalās ar  $2^a$ , vai arī viens no tiem dalās ar  $2^{a-1}$ , bet otrs ar 2. Jebkurā gadījumā viens no skaitļiem  $x+1$  un  $x-1$  dalās ar  $2^{a-1}$ . Tā kā no nosacījuma  $x+y = 2^a$  seko, ka  $1 \leq x \leq 2^a - 1$ , tad  $x$  var būt tikai šādas vērtības:  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 2^{a-1} - 1$ ;  $x_3 = 2^{a-1} + 1$ ;  $x_4 = 2^a - 1$ , kur  $a$  – naturāls skaitlis ( $x = 2^{a-1} - 1$  der tikai pie  $a \geq 2$ ). Atbilstošās  $y$  vērtības iegūst kā  $y = 2^a - x$ , un  $y_1 = 2^a - 1$ ;  $y_2 = 2^{a-1} + 1$ ;  $y_3 = 2^{a-1} - 1$ ;  $y_4 = 1$  (vērtība  $y_3$  un tātad arī  $x_3$  der tikai pie  $a \geq 2$ ). Apkopojot redzam, ka **varbūt** der  $(x; y) = (1; 2^a - 1)$ ;  $(x; y) = (2^a - 1; 2^a + 1)$ ;  $(x; y) = (2^a + 1; 2^a - 1)$ ;  $(x; y) = (2^a - 1; 1)$ ,  $a$  – naturāls. Pārbaude parāda, ka šīs vērtības tiešām der;  $z = 2a$  vai  $z = 3a + 1$ .

**11.4. A.** Pieņemsim, ka  $AB$  ir  $\omega$  diametrs. Tad  $AN$  un  $BM$  ir  $\triangle ABC$  augstumi; apzīmēsim  $\triangle ABC$  augstumu krustpunktu ar  $H$ . Pieņemsim, ka pieskare, kas  $\omega$  novilkta punktā  $M$ , krusto augstumu  $CH$  punktā  $X$ . Tad  $\angle MCX = 90^\circ - \angle A = \angle ABM = \angle SMA$  (ievilkts un hordas – pieskares leņķis) =  $\angle CMX$ , tātad  $\triangle MXC$  ir vienādsānu. Tātad  $X$  atrodas uz  $MC$  vidusperpendikula, tātad (pēc Talesa teorēmas)  $CH$  viduspunktā. Līdzīgi arī  $\omega$  pieskare, kas novilkta punktā  $N$ , krusto  $CH$  tā viduspunktā, tātad punktā  $X$ , un  $CX = NX$ . No  $MX = CX = NX$  seko, ka  $X$  ir  $\triangle CMN$  apvilktās riņķa līnijas centrs.



**B.** Pieņemsim, ka  $O$  ir  $\triangle CMN$  apvilktais riņķa līnijas centrs. Tad (skat. 5. zīm.)  $OC = OM = ON$ , tātad  $\angle CMO = \angle MCO = \angle ABM$  un  $\angle CNO = \angle NCO = \angle NAB$ . Tātad  $\angle ACB = \angle ABM + \angle BAN$  un  $2\angle ANB = \angle ANB + \angle AMB = 180^\circ - \angle B - \angle C + 180^\circ - \angle A - \angle C = 360^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C) = 180^\circ$ , tātad  $\angle ANB = 90^\circ$  un  $AB$  ir  $\omega$  diametrs.

**11.5.** To nevar panākt nevienam  $n$ . Apzīmēsim  $n$ -stūra  $A$  virsotnes ar  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , bet centru – ar  $O$ . Apskatīsim lielumu  $\vec{S} = a_1 \cdot \vec{OA}_1 + a_2 \cdot \vec{OA}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{OA}_n$ , kur  $a_i$  ir virsotnē  $A_i$  ierakstītais skaitlis ( $i = 1; 2; \dots; n$ ). Sākotnēji  $\vec{S}$  nav nulles vektors. Izdarot pieļauto gājieni,  $\vec{S}$  „izmainās” par  $\vec{0}$  (jo to vektoru summa, kas savieno  $O$  ar regulārā  $k$ -stūra virsotnēm, noteikti ir  $\vec{0}$ ), tātad  $\vec{S}$  **nekad** nav  $\vec{0}$ . Bet, ja visās  $n$ -stūra  $A$  virsotnēs atrastos vienādi skaitļi, tad būtu  $\vec{S} = \vec{0}$ .

**12.1.** Ievērosim, ka  $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg}(45^\circ - x)) = (1 + \operatorname{tg} x) \left( 1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right) = (1 + \operatorname{tg} x) \cdot \frac{2}{1 + \operatorname{tg} x} = 2$  visām pieļaujamām  $x$  vērtībām. Grupējot reizinātājus  $(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)$  un  $(1 + \operatorname{tg} 44^\circ)$ ,  $(1 + \operatorname{tg} 2^\circ)$  un  $(1 + \operatorname{tg} 43^\circ)$  utt., iegūstam vajadzīgo.

**12.2. a)** Ievietojot  $x = y = a$ , iegūstam  $f(a) \leq 2f(a)$ , tātad  $f(a) \geq 0$ . Ņemot  $x = 0; y = 1$ , iegūstam

$$0 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(0) + f(1) = 0, \text{ tātad } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Pieņemsim, ka ir jau pierādīts, ka kādam naturālam  $k$  pastāv vienādība  $f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$ . Tad, ņemot

$x = 0$  un  $y = \frac{1}{2^k}$ , iegūstam  $0 \leq f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq f(0) + f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$ , tātad  $f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 0$ . Tātad katram

naturālam  $n$  pastāv vienādība  $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ .

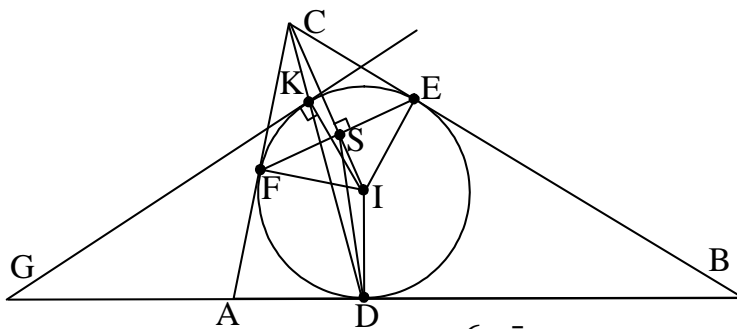
**b)** funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \text{ – racionāls skaitlis} \\ 1, & \text{ja } x \text{ – iracionāls skaitlis} \end{cases}$$

apmierina visas uzdevuma prasības.

**12.3. a)** Tā kā  $CF = CE$ , tad  $\triangle ECF$  ir vienādsānu un tā bisektrise  $CS$  ir arī augstums. Tātad  $ES$  ir augstums pret hipotenūzu taisnleņķa trijstūrī  $CEI$ . Tātad  $EI^2 = IS \cdot IC$ . Tā kā  $EI = DI$ , tad  $DI^2 = IS \cdot IC$ , no kurienes  $DI : IC = IS : ID$ . Tātad  $\triangle SID \sim \triangle DIC$  (kopējs leņķis  $I$  un proporcionālas to ietverošās malas).

**b)** Tā kā  $\angle GKI = \angle GDI = 90^\circ$ , tad ap četrstūri  $GKID$  var apvilkt riņķa līniju  $\omega$ . No a) punkta seko, ka  $\angle ISD = \angle IDC = \angle IDK = \angle IKD$ . Tātad  $S$  arī atrodas uz  $\omega$ . Tātad  $\angle GSI = \angle GKI = 90^\circ$ .



6. zīm.

**12.4.** Vispirms pierādīsim, ka  $n + 1$ ;  $n + 2$ ;  $n + 3$  ir kaut kādu pirmskaitļu pakāpes ar naturāliem kāpinātājiem. Pretējā gadījumā kāds no šiem skaitļiem būtu izsakāms kā reizinājums  $a \cdot b$ , kur  $a \geq 2$ ,  $b \geq 2$ ,  $\text{LKD}(a, b) = 1$ . Tā kā  $m$  nedalās ar  $a \cdot b$ , tad vai nu  $m$  nedalās ar  $a$ , vai arī  $m$  nedalās ar  $b$ ; pieņemsim, ka  $m$  nedalās ar  $a$ . Tad  $a \geq n + 1$ . Tā kā  $a \cdot b \leq n + 3$ , tad  $a \cdot b - a \leq 2$  jeb  $a(b - 1) \leq 2$ . Tas iespējams tikai, ja  $a = 2$  un  $b = 2$ ; tad  $a \cdot b = 4$ . Ja  $n + 1 = 4$ , tad  $n = 3$ ; ja  $n + 2 = 4$ , tad  $n = 2$ ; ja  $n + 3 = 4$ , tad  $n = 1$ . Vērtība  $n = 3$  neapmierina uzdevuma nosacījumus (ja  $m$  dalās ar 2 un ar 3, tad  $m$  dalās arī ar 6); pie  $n = 1$  un  $n = 2$  visi skaitļi  $n + 1$ ;  $n + 2$ ;  $n + 3$  ir pirmskaitļu pakāpes.

Tātad  $n + 1$ ;  $n + 2$ ;  $n + 3$  ir pirmskaitļu pakāpes.

Vismaz viens no šiem skaitļiem ir pāra skaitlis, tātad ir  $2^x$ ; tieši viens dalās ar 3, tātad ir  $3^y$ . Tāpēc  $2^x = 3^y \pm 1$ . Šķirojam abus gadījumus:

a)  $2^x = 3^y + 1$ . Tā kā  $2^{2t+1} = 2 \cdot 4^t = 2 \cdot (3+1)^t$ , tad pie nepāra  $x$  pakāpe  $2^x$  dod atlikumu 2, dalot ar 3; tāpēc  $x$  ir pāra skaitlis,  $x = 2z$ . Iegūstam  $2^{2z} - 1 = 3^y$  un  $(2^z - 1)(2^z + 1) = 3^y$ . Tātad  $2^z - 1$  un  $2^z + 1$  ir trijnieka pakāpes vai 1; tās savā starpā atšķiras par 2, tāpēc ir 1 un 3. Tāpēc  $z = 1$ ,  $x = 2$  un mūsu apskatāmā divnieka pakāpe ir 4.

Ja  $n + 1 = 4$ , tad  $n = 3$ ; jau iepriekš redzējām, ka tas neder. Ja  $n + 2 = 4$ , tad  $n = 2$ ; varam ņemt  $m = 2$ . Ja  $n + 3 = 4$ , tad  $n = 1$ ; varam ņemt  $m = 1$ .

b)  $2^x = 3^y - 1$ . Pie  $x = 1$  nonākam pie  $n = 1$ ; pieņemam, ka  $x \geq 2$ . Ja  $y$  – nepāra skaitlis, tad  $y = 2t + 1$  un  $3^y - 1 = 3^{2t+1} - 1 = 3 \cdot 9^t - 1 = 3 \cdot (8+1)^t - 1$  dalās ar 2, bet nedalās ar 4; tā nevar būt. Tāpēc  $y = 2z$  un  $2^x = (3^z - 1)(3^z + 1)$ . Tāpēc skaitļi  $3^z - 1$  un  $3^z + 1$  ir divnieka pakāpes vai 1, kas savā starpā atšķiras par 2; tie var būt tikai 2 un 4. Tad  $2^x = 8$ . Ja  $n + 1 = 8$ , tad  $n = 7$ ; tā kā  $n + 3 = 10$  nav pirmskaitļa pakāpe, šī atbilde neder. Ja  $n + 2 = 8$ , tad  $n = 6$ ; var ņemt  $m = 60$ . Ja  $n + 3 = 8$ , tad  $n = 5$ ; tā kā  $n + 1 = 6$  nav pirmskaitļa pakāpe, šī atbilde neder.

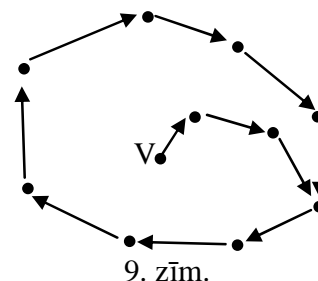
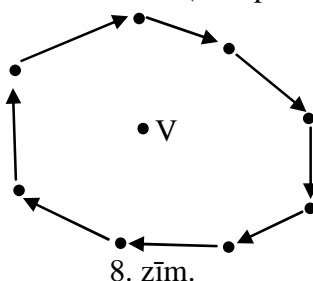
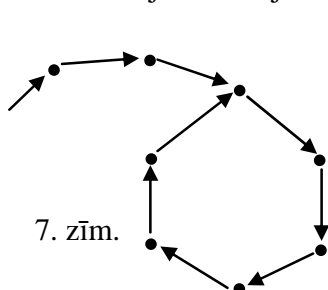
**Atbilde:**  $n = 1$ ;  $n = 2$ ;  $n = 6$ .

**12.5.** Apskatīsim vispirms izliekta daudzskaldņa gadījumu.

Sākam iet no patvaļīgas virsotnes bultiņu virzienos pa šķautnēm. Tas ir iespējams, jo no katras virsotnes iziet kāda šķautne. Tā kā virsotņu ir galīgs skaits, tad kādreiz mēs atgriezīsimies virsotnē, kurā jau esam bijuši. Šai brīdī būs izveidojies cikls, kas apejams bultiņu virzienos (skat. 7. zīm.) Šis cikls sadala daudzskaldņa virsmu divās daļās. Apskatām  $D$  – vienu no tām. Ja tajā iekšpusē nav ne citu virsotņu, ne citu šķautņu, tad tā ir skaldne, kāda mums nepieciešama. Pieņemsim, ka šīs daļas  $D$  iekšpusē atrodas virsotne  $V$  (skat. 8. zīm.)

Sākam iet no virsotnes  $V$  pa šķautnēm bultiņu virzienos, kamēr

- a) vai nu nonākam uz jau esošā kontūra,
- b) vai arī mūsu jaunveidojamais ceļš izveido ciklu (kā iepriekš).



Otrajā gadījumā atrastais cikls ierobežo **mazāku** daļu nekā  $D$ . Pirmajā gadījumā (skat. 8. zīm.) sākam iet no virsotnes  $V$  pa šķautnēm **pretēji** bultiņu virzieniem, kamēr nonākam kādā virsotnē, kas jau redzama 9. zīm.

Ja turpretī  $D$  iekšpusē nav citu virsotņu, bet ir šķautne, tad apskatām šo šķautni kopā ar katru no  $D$  kontūra daļām, kurās šī šķautne sadala  $D$  kontūru.

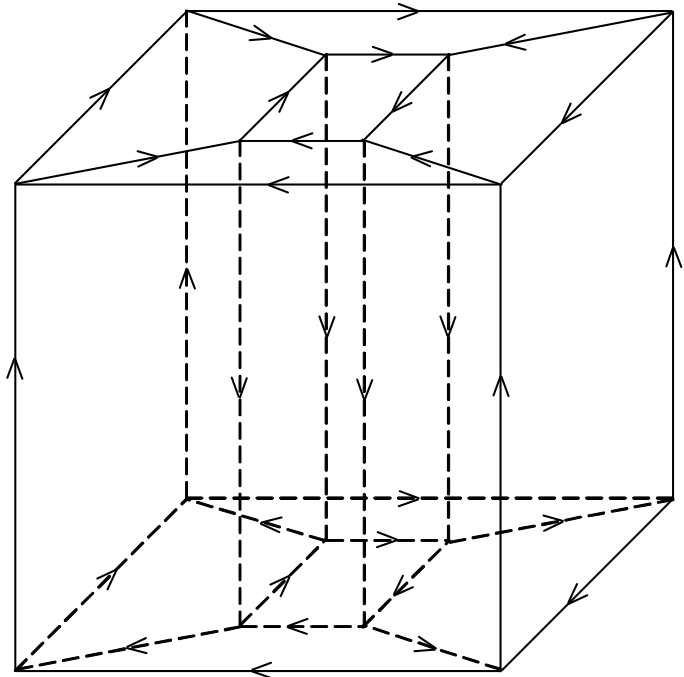
Katrā gadījumā izveidosies daļa, kas **mazāka** par  $D$  un apejama pa kontūru bultiņu virzienos.

Ar šo daļu rīkojamies tāpat kā iepriekš ar daļu  $D$  utt. Tā kā nevaram atrast bezgalīgi daudz arvien mazākas daļas, kuras norobežo pa šķautnēm esošas kontūras, tad kādreiz iegūsim daļu, kas apejama pa kontūru bultiņu virzienā un kuras iekšpusē nav ne citu virsotņu, ne citu šķautņu, t.i., iegūsim mums vajadzīgo skaldni.

**Piezīme.** Viegli pamanīt, ka šādas skaldnes ir vismaz divas (pa vienai katrā no tām daļām, kurās daudzskaldņa virsmu sadala pirmais atrastais cikls).

Ieliekta daudzskaldņa gadījumā šādu skaldni varbūt arī nevar atrast. Piemērs redzams 10. zīm. (Daudzskaldnis ir kubs ar prizmveidīgu „caurumu”).

**Piezīme.** Spriedumu, kas derīgs izliktam daudzskaldnim, šoreiz nevar atkārtot, jo sākotnējais (un arī katrs nākošais) cikls var **nesadalīt** virsmu divās daļās, un tāpēc nav pamata apgalvot, ka katrs nākošais atrastais cikls ierobežo **mazāku** apgabalu nekā iepriekšējais, tāpēc mūsu aprakstītais meklēšanas process var nekad nebeigties.



10. zīm.