9.1. Pieņemsim pretējo. Tā kā $\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x}$ un $\frac{x+y}{y}=1+\frac{x}{y}$, tad x dalās ar y un y dalās ar x; tāpēc x = y. Bet tad MKD(x,y) = MKD(x,x) = x ≠ x + y.

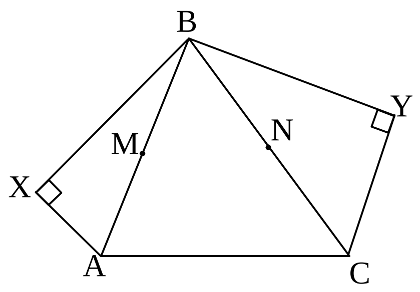
9.2. No dotā seko $ab^2+a=c+1$ un $2ab=c+1$, tātad $ab^2+a=2ab$ un $a(b-1)^2=0$. Tāpēc b = 1. Tagad no vienādības $ab=\frac{c+1}{2}$ seko $a=\frac{c+b}{2}$.

9.3. Apskatīsim r.l. ievilktu regulāru 12-stūri: $A_1A_2...A_{12}$. Katrā no trijstūriem $A_1A_5A_9$, $A_2A_6A_{10}$, $A_3A_7A_{11}$, $A_4A_8A_{12}$ ir vismaz divas baltas virsotnes, tātad pavisam balto virsotņu ir vismaz astoņas. Tās sadalās pa trīs kvadrātiem $A_1A_4A_7A_{10}$, $A_2A_5A_8A_{11}$, $A_3A_6A_9A_{12}$. Ja katrā kvadrātā būtu augstākais divas baltas virsotnes, tad kopā to nebūtu vairāk par 6 – pretruna.

9.4. Apzīmēsim ar M un N malu AB un BC viduspunktus. Tad $XM=\frac{1}{2}AB$, $YN=\frac{1}{2}BC$ (mediāna pret hipotenūzu) un $MN=\frac{1}{2}AC$ (viduslīnija). Tāpēc

$$XY\le XM+MN+NY\le\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AB+BC+CA),$$

k.b.j.



9.5. Apzīmēsim lodīšu daudzumu kastēs attiecīgi ar b,s,m. No nosacījuma par sarkano kasti seko, ka $s\le5$ (pat sešu **vismazāko** numuru vidējais aritmētiskais ir $(1+2+3+4+5+6):6=3\frac{1}{2}>3$, un, pievienojot lielākus numurus, tas augs). Skaidrs, ka pastāv vienādības

$$b+s+m=27$$
$$15b+3s+18m=1+2+...+27=378$$

No šejienes $(15b+3s+18m)-3(b+s+m)=378-3\cdot27=297$, tāpēc $12b+15m=297$ un **4b+5m=99.**
Tiešas pārbaudes ceļā pārliecināsimies, ka (b;m) var būt (21;3), (16;7), (11;11), (6;15), (1;19); atbilstošās s vērtības ir attiecīgi 3;4;5;6;7, Tā kā $s\le5$, divas pēdējās iespējas atkrīt. Pierādīsim, ka trīs pirmās tiešām pastāv:

baltajā kastē	5; 6; ...; 25	7; 8; ...; 14; 16; 17; ...; 23	10; 11; ...; 20
sarkanajā kastē	2; 3; 4	1; 2; 4; 5	1; 2; 3; 4; 5
melnajā kastē	1; 26; 27	3; 6; 15; 24; 25; 26; 27	6; 7; 8; 9; 21; ...; 27

10.1. No VA – VĢ nevienādības $1+ab\ge2\sqrt{ab}$; līdzīgi $1+ac\ge2\sqrt{ac}$ un $1+bc\ge2\sqrt{bc}$. Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam vajadzīgo.

10.2. Apzīmējam 3 pēdējo ciparu veidoto skaitli ar y, bet pēc nosvītrošanas palikušo skaitli ar a. Tad $0\le y<1000$ un $a^3=1000a+y$. Tāpēc

1) $a^3\ge1000a$, $a^2\ge1000$ un $a\ge32$,
2) $a^3<1000a+1000$ un $a(a^2-1000)<1000$.

Pie $a\ge32$ šīs nevienādības kreisā puse ir pozitīva un augoša argumenta a funkcija; viegli pārbaudīt, ka jau $33(33^2-1000)=33\cdot89>1000$, tātad $a<33$. Tātad $32\le a<33$; tā kā a – naturāls skaitlis, tad **varētu būt** vienīgi $a=32$. Pārbaude (tā nepieciešama) parāda, ka $a=32$ der, jo $32^3=32768$.

10.3. a) skaidrs, ka skaitli 1 prasītajā veidā izteikt nevar, jo izteiksmes vērtība nav mazāka par 3.

b) ņemot $x=k$, $y=1$, $z=1$, iegūstam $[x,y]+[y,z]+[z,x]=k+1+k=2k+1, \quad k\in N$.

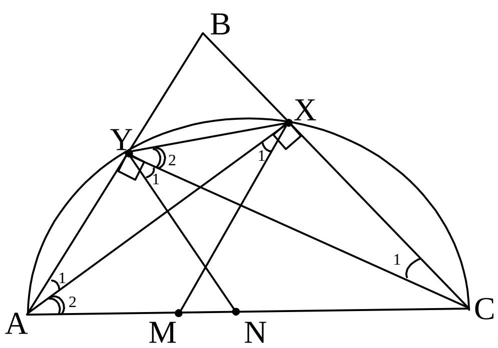
Tātad var izteikt visus nepāra skaitļus, kas lielāki par 1.

c) ja $n=[x,y]+[y,z]+[z,x]$, tad $[2x,2y]+[2y,2z]+[2z,2x]=2([x,y]+[y,z]+[z,x])=2n$.

Tātad, ja var izteikt skaitli n, tad var izteikt arī skaitli 2n. No šejienes un no b) seko: var izteikt visus pāra skaitļus, kas nav divnieka pakāpes.

d) pierādīsim, ka divnieka pakāpes $2^k, k\in N$, tā izsacīt nevar. Tas ir acīmredzami pie $k=1$ (skat. a) punktu). Pieņemsim, ka $k\geq 2$, un no pretējā pieņemsim, ka $2^k=[2^a\cdot x_1, 2^b\cdot y_1]+[2^b\cdot y_1, 2^c\cdot z_1]+[2^c\cdot z_1, 2^a\cdot x_1]$, kur $a\geq b\geq c$, x_1, y_1, z_1 - nepāra skaitļi. Skaidrs, ka $k>a$ un $k>b$. Tad $2^k=2^a[x_1,y_1]+2^b[y_1,z_1]+2^a[z_1,x_1]$ un $2^{k-b}=2^{a-b}[x_1,y_1]+[y_1,z_1]+2^{a-b}[z_1,x_1]$. Tā ir pretruna, jo kreisajā vienādības pusē ir pāra skaitlis, bet labajā – nepāra.

10.4.



Tā kā $\angle AYC=\angle AXC$, tad A, Y, X, C ir uz vienas riņķa līnijas. Tāpēc $\angle YAX=\angle YCX$ un $\angle XAC=\angle XYC$; $\angle CYN=\angle YCX$ un $\angle AXM=\angle YAX$ (iekšējie šķērsleņķi). Tāpēc $\angle NYX=\angle_1+\angle_2$ un arī $\angle NMX=\angle_1+\angle_2$ (ΔAMX ārējais leņķis). No $\angle NYX=\angle NMX$ seko vajadzīgais.

10.5. Ir pavisam $2^{12}=4096$ profesoru kopas; tās var apvienot pa 2048 pāriem (A, $\bar{A}$) (kopa un tās papildinājums). Tā kā $2048-1>2008$, tad eksistē tāda profesoru kopa S, ka ne S, ne $\bar{S}$ nav tukša kopa un ne S, ne $\bar{S}$ vēl nav padome.

Pieņemsim, ka S nevar kalpot par jaundibināmo padomi. Tad S nav kopīga locekļa ar kādu jau esošu padomi P. Tad $\bar{S}$ satur padomi P kā apakškopu, tātad $\bar{S}$ ir kopīgs loceklis ar katru jau esošu padomi; tātad par jauno padomi var kalpot $\bar{S}$.

11.1.

							6
			3				
						5	
		2		4			
	1						
•							

Kā redzams zīmējumā, pietiek ar 6 gājieniem. Ar 5 gājieniem tas nav izdarāms, jo pēc 5. gājiena zirdziņš būs uz balta lauciņa; ar ≤ 4 gājieniem nepietiek, jo tajos kopā zirdziņš būs pārvietojies pa labi un uz augšu par $\leq 4\cdot 3=12$ vienībām, bet kopējam pārvietojumam jābūt vismaz $7+7=14$.

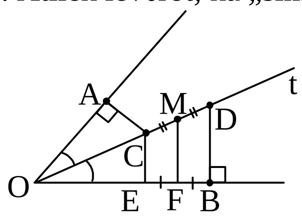
11.2. Apzīmējam $a_n=\left|\ldots\left|\left|x-1\right|-10\right|-10^2\right|-\ldots-10^{n-1}\right|-10^n$. Tad $a_{2007}=\mp 10^{2008}$. No $a_{2007}=\left|a_{2006}\right|-10^{2007}$ seko, ka $\left|a_{2006}\right|=\mp 10^{2008}+10^{2007}$. Tā kā $-10^{2008}+10^{2007}<0$, tad $\left|a_{2006}\right|=10^{2008}+10^{2007}$ un

$a_{2006} = \mp(10^{2007} + 10^{2008})$. Līdzīgi turpinot (precīzs pierādījums ar indukciju), iegūstam, ka $|x-1| = 10^1 + 10^2 + ... + 10^{2008}$, no kurienes $x_1 = \underbrace{11...1}_{2009}$ un $x_2 = -\underbrace{11...1}_{2007}09$.

11.3. Kvadrāts nebeidzas ar „2”, tātad n^2 beidzas ar „1”. Ja priekšpēdējais cipars būtu 1, tad $n^2 = ...11 = ...00 + 11$ dotu atlikumu 3, dalot ar 4; tā nevar būt, jo $(2k)^2 = 4 \cdot k^2$ un $(2k+1)^2 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1$. Tāpēc priekšpēdējais cipars ir 2. Ja $n^2 = \underbrace{11...1}_{\text{nep.skaits}}21$, tad n^2 dalās ar 11 saskaņā ar dalāmības pazīmi. Ja $n^2 = \underbrace{11...1}_{\text{pāra skaits}}21$, tad n^2, dalot ar 11, dod tādu pašu atlikumu kā $1 - 2 + (1 - 1 + 1 - 1 + ... + 1 - 1)$, t.i., atlikumu 10. Bet tas nevar būt:

$(11k)^2 = 121k^2$	atl. 0
$(11k \mp 1)^2 = 121k^2 \mp 22k + 1$	atl. 1
$(11k \mp 2)^2 = 121k^2 \mp 44k + 4$	atl. 4
$(11k \mp 3)^2 = 121k^2 \mp 66k + 9$	atl. 9
$(11k \mp 4)^2 = 121k^2 \mp 88k + 16$	atl. 5
$(11k \mp 5)^2 = 121k^2 \mp 110k + 25$	atl. 3.

11.4. Novelkam vēl perpendikulus CE un MF. Tad M ir taisnleņķa trapeces DBEC sānu malas DC viduspunkts, tātad atrodas uz viduslīnijas; tāpēc EF=FB. Tātad ΔEMB ir vienādsānu (augstums sakrīt ar mediānu), tātad ME=MB. Atliek ievērot, ka „simetrijas pēc” ME=MA.



11.5. Pieņemsim, ka i-tā krāsa sastopama x_i rindiņās un y_i kolonnās. Tad $x_i \cdot y_i \geq 10$. Tāpēc $x_i + y_i \geq 2\sqrt{x_i y_i} \geq 2\sqrt{10} \geq 2 \cdot 3,... > 6$, tātad $x_i + y_i \geq 7$. Tāpēc $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + ... + (x_{10} + y_{10}) \geq 70$.

Ja katra rinda un katra kolonna saturētu ne vairāk par 3 krāsām, tad būtu ne vairāk kā $3 \cdot (10 + 10) = 60$ „gadījumu”, kad kāda krāsa sastopama kādā rindā vai kolonnā – pretruna.

12.1. Pieņemsim, ka tādi skaitļi eksistē.

Ievērosim, ka $\frac{1}{a} = -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -\frac{b+c}{bc} = -\frac{-a}{bc} = \frac{a}{bc}$, tātad $a^2 = bc$. Tātad $bc > 0$, tātad b un c ir vai nu abi pozitīvi, vai abi negatīvi. Tas pats attiecas uz a un b. Tātad a, b, c vai nu visi pozitīvi, vai visi negatīvi. Bet tad nevar būt $a + b + c = 0$ - pretruna.

12.2. Visu 4 krustpunktu koordinātes (x, y) apmierina **gan** nosacījumu $x = y^2 + y + b$, **gan** $y = x^2 + x + a$, tātad arī nosacījumu $x + y = (x^2 + y^2) + (x + y) + (a + b)$ jeb $x^2 + y^2 = -(a + b)$. Tātad visi 4 punkti atrodas attālumā $\sqrt{-(a+b)}$ no koordinātu sākumpunkta, kas tātad ir meklētās riņķa līnijas centrs.

12.3. Risinām vienādojumu $x^2 + (x+1)^2 = (x+a)^2$, $a \geq 2$, $a \in N$.

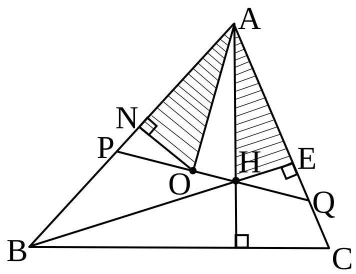
Tas pārveidojas par $x^2 + (2 - 2a)x + (1 - a^2) = 0$, no kurienes $x = a - 1 + \sqrt{2a(a-1)} > 2(a-1)$.

Tā kā jābūt $x \leq 200$, tad $2 \leq a \leq 101$; bez tam $2a(a-1)$ jābūt vesela skaitļa kvadrātam. Šķirojam divus gadījumus:

1) a – nepāra skaitlis. Tad skaitļiem a un $2(a-1)$ nav kopīgu pirmreizinātāju (jo a un a-1 **nekad** nav kopīgu pirmreizinātāju); tāpēc tiem abiem jābūt kvadrātiem. Kā kandidāti der tikai a=9; 25; 49; 81. Pārbaude rāda, ka der tikai $a=9$; tad **x=20** un **y=29**.

2) a – pāra skaitlis. Tad skaitļiem $2a$ un $a-1$ nav kopīgu pirmreizinātāju; tāpēc gan 2a, gan $a-1$ jābūt kvadrātam. Kā kandidāti der tikai a=2; 8; 18; 32; 50; 72; 98. Pārbaude rāda, ka der tikai $a=2$ un $a=50$. Iegūstam **x=3; y=4** un **x=119; y=169**.

12.4.



Punkti O un H atrodas ΔABC iekšpusē, jo tas ir šaurleņķu. Ja N ir AB viduspunkts, tad $ON \perp AB$. Saskaņā ar doto $AE=\frac{1}{2}AB=AN$. No ievilkta un centra leņķa īpašībām $\angle NOA=\angle BCA$, tāpēc $\angle NAO=90°-\angle BCA$; arī $\angle EAH=90°-\angle BCA$, tātad $\angle NAO=\angle EAH$. Tāpēc $\Delta AON=\Delta AHE$ (lml). Tātad AO=AH un ΔOAH ir vienādsānu; tātad $\angle AOH=\angle AHO$. No tā un no $\angle NOA=\angle EHA$ seko $\angle PON=\angle QHE$. Tāpēc $\Delta OPN=\Delta HQE$ (lml); tāpēc arī $OP=HQ$, k.b.j.

12.5. Jā, Andris to var panākt. Vispirms parādīsim kā Andris var panākt, lai figūriņa pārbīdītos par attālumu $\frac{1}{2^{12}}$ pa labi, sākot ar sākotnējo pozīciju. Vispirms Andris nosauc skaitli $\frac{1}{2^{12}}$. Ja Maija bīda figūriņu pa labi, mērķis sasniegts. Ja Maija bīda figūriņu pa kreisi, Andris nosauc skaitli $\frac{1}{2^{11}}$. Ja Maija bīda figūriņu pa labi, mērķis sasniegts, jo $\left(-\frac{1}{2^{12}}\right)+\frac{1}{2^{11}}=\frac{1}{2^{12}}$. Ja Maija bīda figūriņu pa kreisi, Andris nosauc skaitli $\frac{1}{2^{10}}$, utt. Ja Maija n reizes bīdījusi figūriņu pa kreisi $(n \le 11)$, bet $(n+1)-$ā reizē bīda to pa labi, tad kopējā pārbīde pa labi ir $\left(-\frac{1}{2^{12}}\right)+\left(-\frac{1}{2^{11}}\right)+...\left(-\frac{1}{2^{13-n}}\right)+\frac{1}{2^{12-n}}=\frac{1}{2^{12}}$. Ja Andris sasniedz šo mērķi vairāk nekā $2008 \cdot 2^{12}$ reizes, figūriņa pārbīdījusies par attālumu vairāk nekā 2008 pa labi.