

9.1. Pieņemsim pretējo. Tā kā $\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$ un $\frac{x+y}{y} = 1 + \frac{x}{y}$, tad x dalās ar y un y dalās ar x ; tāpēc $x = y$.

Bet tad $\text{MKD}(x,y) = \text{MKD}(x,x) = x \neq x + y$.

9.2. No dotā seko $ab^2 + a = c + 1$ un $2ab = c + 1$, tātad $ab^2 + a = 2ab$ un $a(b-1)^2 = 0$. Tāpēc $b = 1$. Tagad no vienādības $ab = \frac{c+1}{2}$ seko $a = \frac{c+b}{2}$.

9.3. Apskatīsim r.l. ievilkto regulāru 12-stūri: $A_1A_2...A_{12}$. Katrā no trijstūriem $A_1A_5A_9$, $A_2A_6A_{10}$, $A_3A_7A_{11}$, $A_4A_8A_{12}$ ir vismaz divas baltas virsotnes, tātad pavisam balto virsotņu ir vismaz astoņas. Tās sadalās pa trīs kvadrātiem $A_1A_4A_7A_{10}$, $A_2A_5A_8A_{11}$, $A_3A_6A_9A_{12}$. Ja katrā kvadrātā būtu augstākais divas baltas virsotnes, tad kopā to nebūtu vairāk par 6 – pretruna.

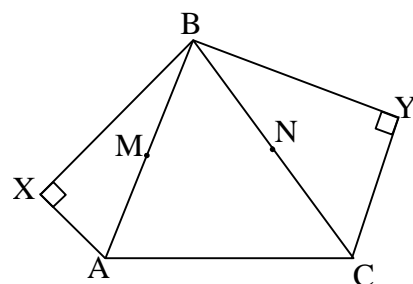
9.4. Apzīmēsim ar M un N malu AB un BC viduspunktus. Tad

$$XM = \frac{1}{2} AB, \quad YN = \frac{1}{2} BC \quad (\text{mediāna pret hipotenūzu}) \quad \text{un}$$

$$MN = \frac{1}{2} AC \quad (\text{viduslīnija}). \quad \text{Tāpēc}$$

$$XY \leq XM + MN + NY \leq \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CA + \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} (AB + BC + CA),$$

k.b.j.



9.5. Apzīmēsim lodīšu daudzumu kastēs attiecīgi ar b, s, m . No nosacījuma par sarkano kasti seko, ka $s \leq 5$

(pat sešu **vismazāko** numuru vidējais aritmētiskais ir $(1+2+3+4+5+6):6 = 3\frac{1}{2} > 3$, un, pievienojot

lielākus numurus, tas augs). Skaidrs, ka pastāv vienādības

$$b + s + m = 27$$

$$15b + 3s + 18m = 1 + 2 + \dots + 27 = 378$$

No šejienes $(15b + 3s + 18m) - 3(b + s + m) = 378 - 3 \cdot 27 = 297$, tāpēc $12b + 15m = 297$ un **$4b + 5m = 99$** .

Tiešas pārbaudes ceļā pārliecināsimies, ka $(b;m)$ var būt $(21;3)$, $(16;7)$, $(11;11)$, $(6;15)$, $(1;19)$; atbilstošās s vērtības ir attiecīgi $3;4;5;6;7$, Tā kā $s \leq 5$, divas pēdējās iespējas atkrīt. Pierādīsim, ka trīs pirmās tiešām pastāv:

baltajā kastē	5; 6; ...; 25	7; 8; ...; 14; 16; 17; ...; 23	10; 11; ...; 20
sarkanajā kastē	2; 3; 4	1; 2; 4; 5	1; 2; 3; 4; 5
melnajā kastē	1; 26; 27	3; 6; 15; 24; 25; 26; 27	6; 7; 8; 9; 21; ...; 27

10.1. No $VA - V\check{G}$ nevienādības $1 + ab \geq 2\sqrt{ab}$; līdzīgi $1 + ac \geq 2\sqrt{ac}$ un $1 + bc \geq 2\sqrt{bc}$. Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam vajadzīgo.

10.2. Apzīmējam 3 pēdējo ciparu veidoto skaitli ar y , bet pēc nosvīturošanas palikušo skaitli ar a . Tad $0 \leq y < 1000$ un $a^3 = 1000a + y$. Tāpēc

1) $a^3 \geq 1000a$, $a^2 \geq 1000$ un $a \geq 32$,

2) $a^3 < 1000a + 1000$ un $a(a^2 - 1000) < 1000$.

Pie $a \geq 32$ šīs nevienādības kreisā puse ir pozitīva un augoša argumenta a funkcija; viegli pārbaudīt, ka jau $33(33^2 - 1000) = 33 \cdot 89 > 1000$, tātad $a < 33$. Tātad $32 \leq a < 33$; tā kā a – naturāls skaitlis, tad **varētu**

būt vienīgi $a = 32$. Pārbaude (tā nepieciešama) parāda, ka $a = 32$ der, jo $32^3 = 32768$.

10.3. a) skaidrs, ka skaitli 1 prasītajā veidā izteikt nevar, jo izteiksmes vērtība nav mazāka par 3.

b) ņemot $x = k, y = 1, z = 1$, iegūstam $[x, y] + [y, z] + [z, x] = k + 1 + k = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$.

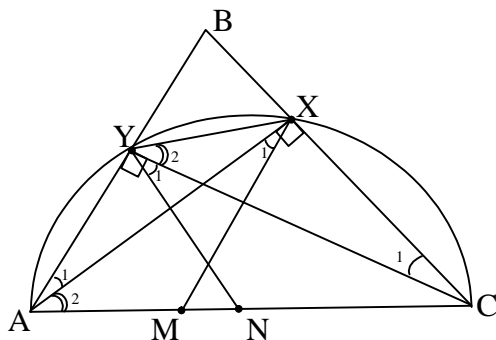
Tātad var izteikt visus nepāra skaitļus, kas lielāki par 1.

c) ja $n = [x, y] + [y, z] + [z, x]$, tad $[2x, 2y] + [2y, 2z] + [2z, 2x] = 2([x, y] + [y, z] + [z, x]) = 2n$.

Tātad, ja var izteikt skaitli n , tad var izteikt arī skaitli $2n$. No šejienes un no b) seko: var izteikt visus pāra skaitļus, kas nav divnieka pakāpes.

d) pierādīsim, ka divnieka pakāpes $2^k, k \in \mathbb{N}$, tā izsacīt nevar. Tas ir acīmredzami pie $k = 1$ (skat. a) punktu). Pieņemsim, ka $k \geq 2$, un no pretējā pieņemsim, ka $2^k = [2^a \cdot x_1, 2^b \cdot y_1] + [2^b \cdot y_1, 2^c \cdot z_1] + [2^c \cdot z_1, 2^a \cdot x_1]$, kur $a \geq b \geq c, x_1, y_1, z_1$ - nepāra skaitļi. Skaidrs, ka $k > a$ un $k > b$. Tad $2^k = 2^a[x_1, y_1] + 2^b[y_1, z_1] + 2^a[z_1, x_1]$ un $2^{k-b} = 2^{a-b}[x_1, y_1] + [y_1, z_1] + 2^{a-b}[z_1, x_1]$. Tā ir pretruna, jo kreisajā vienādības pusē ir pāra skaitlis, bet labajā – nepāra.

10.4.



Tā kā $\angle AYC = \angle AXC$, tad A, Y, X, C ir uz vienas riņķa līnijas. Tāpēc $\angle YAX = \angle YCX$ un $\angle XAC = \angle XYC$; $\angle CYN = \angle YCX$ un $\angle AXM = \angle YAX$ (iekšējie šķērsleņķi). Tāpēc $\angle NYX = \angle_1 + \angle_2$ un arī $\angle NMX = \angle_1 + \angle_2$ ($\triangle AMX$ ārējais leņķis). No $\angle NYX = \angle NMX$ seko vajadzīgais.

10.5. Ir pavisam $2^{12} = 4096$ profesoru kopas; tās var apvienot pa 2048 pāriem (A, \bar{A}) (kopa un tās papildinājums). Tā kā $2048 - 1 > 2008$, tad eksistē tāda profesoru kopa S , ka ne S , ne \bar{S} nav tukša kopa un ne S , ne \bar{S} vēl nav padome.

Pieņemsim, ka S nevar kalpot par jaundibināmo padomi. Tad S nav kopīga locekļa ar kādu jau esošu padomi P . Tad \bar{S} satur padomi P kā apakškopu, tātad \bar{S} ir kopīgs loceklis ar katru jau esošu padomi; tātad par jauno padomi var kalpot \bar{S} .

11.1.

						6
			3			
						5
		2		4		
		1				
•						

Kā redzams zīmējumā, pietiek ar 6 gājieniem. Ar 5 gājieniem tas nav izdarāms, jo pēc 5. gājiena zirdziņš būs uz balta lauciņa; ar ≤ 4 gājieniem nepietiek, jo tajos kopā zirdziņš būs pārvietojies pa labi un uz augšu par $\leq 4 \cdot 3 = 12$ vienībām, bet kopējam pārvietojumam jābūt vismaz $7 + 7 = 14$.

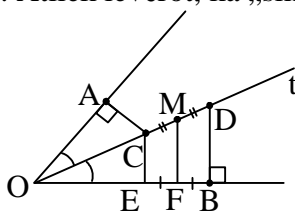
11.2. Apzīmējam $a_n = \left| \dots \left| |x-1| - 10 \right| - 10^2 \right| - \dots - 10^{n-1} \right| - 10^n$. Tad $a_{2007} = \mp 10^{2008}$. No $a_{2007} = |a_{2006}| - 10^{2007}$ seko, ka $|a_{2006}| = \mp 10^{2008} + 10^{2007}$. Tā kā $-10^{2008} + 10^{2007} < 0$, tad $|a_{2006}| = 10^{2008} + 10^{2007}$ un

$a_{2006} = \mp(10^{2007} + 10^{2008})$. Līdzīgi turpinot (precīzs pierādījums ar indukciju), iegūstam, ka $|x - 1| = 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{2008}$, no kurienes $x_1 = \underbrace{11\dots1}_{2009}$ un $x_2 = -\underbrace{11\dots1}_{2007}109$.

11.3. Kvadrāts nebeidzas ar „2”, tātad n^2 beidzas ar „1”. Ja priekšpēdējais cipars būtu 1, tad $n^2 = \dots 11 = \dots 00 + 11$ dotu atlikumu 3, dalot ar 4; tā nevar būt, jo $(2k)^2 = 4 \cdot k^2$ un $(2k+1)^2 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1$. Tāpēc priekšpēdējais cipars ir 2. Ja $n^2 = \underbrace{11\dots1}_{\text{nep.skaitis}}21$, tad n^2 dalās ar 11 saskaņā ar dalāmības pazīmi. Ja $n^2 = \underbrace{11\dots1}_{\text{para skaitis}}21$, tad n^2 , dalot ar 11, dod tādu pašu atlikumu kā $1 - 2 + (1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1)$, t.i., atlikumu 10. Bet tas nevar būt:

$$\begin{aligned} (11k)^2 &= 121k^2 && \text{atl. } 0 \\ (11k \mp 1)^2 &= 121k^2 \mp 22k + 1 && \text{atl. } 1 \\ (11k \mp 2)^2 &= 121k^2 \mp 44k + 4 && \text{atl. } 4 \\ (11k \mp 3)^2 &= 121k^2 \mp 66k + 9 && \text{atl. } 9 \\ (11k \mp 4)^2 &= 121k^2 \mp 88k + 16 && \text{atl. } 5 \\ (11k \mp 5)^2 &= 121k^2 \mp 110k + 25 && \text{atl. } 3. \end{aligned}$$

11.4. Novelkam vēl perpendikulus CE un MF. Tad M ir taisnleņķa trapeces DBEC sānu malas DC viduspunkts, tātad atrodas uz viduslīnijas; tāpēc EF=FB. Tātad $\triangle EMB$ ir vienādsānu (augstums sakrīt ar mediānu), tātad ME=MB. Atliek ievērot, ka „simetrijas pēc” ME=MA.



11.5. Pieņemsim, ka i-tā krāsa sastopama x_i rindīnās un y_i kolonnās. Tad $x_i \cdot y_i \geq 10$. Tāpēc $x_i + y_i \geq 2\sqrt{x_i y_i} \geq 2\sqrt{10} \geq 2 \cdot 3, \dots > 6$, tātad $x_i + y_i \geq 7$. Tāpēc $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_{10} + y_{10}) \geq 70$.
Ja katra rinda un katra kolonna saturētu ne vairāk par 3 krāsām, tad būtu ne vairāk kā $3 \cdot (10 + 10) = 60$ „gadījumu”, kad kāda krāsa sastopama kādā rindā vai kolonnā – pretruna.

12.1. Pieņemsim, ka tādi skaitļi eksistē.
Ievērosim, ka $\frac{1}{a} = -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -\frac{b+c}{bc} = -\frac{-a}{bc} = \frac{a}{bc}$, tātad $a^2 = bc$. Tātad $bc > 0$, tātad b un c ir vai nu abi pozitīvi, vai abi negatīvi. Tas pats attiecas uz a un b. Tātad a, b, c vai nu visi pozitīvi, vai visi negatīvi. Bet tad nevar būt $a + b + c = 0$ - pretruna.

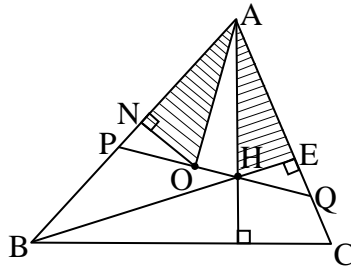
12.2. Visu 4 krustpunktu koordinātes (x, y) apmierina gan nosacījumu $x = y^2 + y + b$, gan $y = x^2 + x + a$, tātad arī nosacījumu $x + y = (x^2 + y^2) + (x + y) + (a + b)$ jeb $x^2 + y^2 = -(a + b)$. Tātad visi 4 punkti atrodas attālumā $\sqrt{-(a + b)}$ no koordinātu sākumpunkta, kas tātad ir meklētās riņķa līnijas centrs.

12.3. Risinām vienādojumu $x^2 + (x + 1)^2 = (x + a)^2$, $a \geq 2$, $a \in \mathbb{N}$.
Tas pārveidojas par $x^2 + (2 - 2a)x + (1 - a^2) = 0$, no kurienes $x = a - 1 + \sqrt{2a(a - 1)} > 2(a - 1)$.
Tā kā jābūt $x \leq 200$, tad $2 \leq a \leq 101$; bez tam $2a(a - 1)$ jābūt vesela skaitļa kvadrātam. Šķirojam divus gadījumus:

1) a – nepāra skaitlis. Tad skaitļiem a un $2(a-1)$ nav kopīgu pirmreizinātāju (jo a un $a-1$ **nekad** nav kopīgu pirmreizinātāju); tāpēc tiem abiem jābūt kvadrātiem. Kā kandidāti der tikai $a=9$; 25; 49; 81. Pārbaude rāda, ka der tikai $a=9$; tad $x=20$ un $y=29$.

2) a – pāra skaitlis. Tad skaitļiem $2a$ un $a-1$ nav kopīgu pirmreizinātāju; tāpēc gan $2a$, gan $a-1$ jābūt kvadrātiem. Kā kandidāti der tikai $a=2$; 8; 18; 32; 50; 72; 98. Pārbaude rāda, ka der tikai $a=2$ un $a=50$. Iegūstam $x=3$; $y=4$ un $x=119$; $y=169$.

12.4.



Punkti O un H atrodas $\triangle ABC$ iekšpusē, jo tas ir šaurleņķu. Ja N ir AB viduspunkts, tad $ON \perp AB$. Saskaņā ar doto $AE = \frac{1}{2}AB = AN$. No ievilкта un centra leņķa īpašībām $\angle NOA = \angle BCA$, tāpēc $\angle NAO = 90^\circ - \angle BCA$; arī $\angle EAH = 90^\circ - \angle BCA$, tātad $\angle NAO = \angle EAH$. Tāpēc $\triangle AON = \triangle AHE$ (lml). Tātad $AO = AH$ un $\triangle OAH$ ir vienādsānu; tātad $\angle AOH = \angle AHO$. No tā un no $\angle NOA = \angle EHA$ seko $\angle PON = \angle QHE$. Tāpēc $\triangle OPN = \triangle HQE$ (lml); tāpēc arī $OP = HQ$, k.b.j.

12.5. Jā, Andris to var panākt. Vispirms parādīsim kā Andris var panākt, lai figūriņa pārbīdītos par attālumu $\frac{1}{2^{12}}$ pa labi, sākot ar sākotnējo pozīciju. Vispirms Andris nosauc skaitli $\frac{1}{2^{12}}$. Ja Maija būda figūriņu pa labi, mērķis sasniegts. Ja Maija būda figūriņu pa kreisi, Andris nosauc skaitli $\frac{1}{2^{11}}$. Ja Maija būda figūriņu pa labi, mērķis sasniegts, jo $\left(-\frac{1}{2^{12}}\right) + \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2^{12}}$. Ja Maija būda figūriņu pa kreisi, Andris nosauc skaitli $\frac{1}{2^{10}}$, utt. Ja Maija n reizes bīdījusi figūriņu pa kreisi ($n \leq 11$), bet $(n+1)$ -ā reizē būda to pa labi, tad kopējā pārbīde pa labi ir $\left(-\frac{1}{2^{12}}\right) + \left(-\frac{1}{2^{11}}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2^{13-n}}\right) + \frac{1}{2^{12-n}} = \frac{1}{2^{12}}$. Ja Andris sasniedz šo mērķi vairāk nekā $2008 \cdot 2^{12}$ reizes, figūriņa pārbīdījies par attālumu vairāk nekā 2008 pa labi.