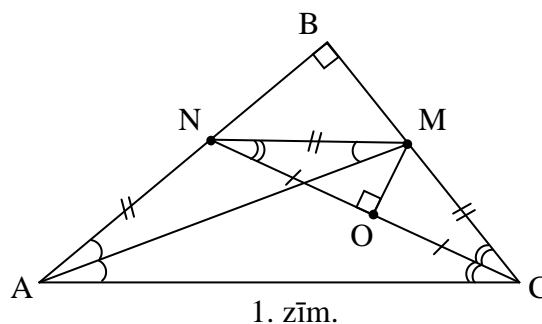


9.1. Saskaņā ar Vjeta teorēmu  $x_1 + x_2 = a^2$  un  $x_1 x_2 = b^2$ .

Pieņemsim, ka eksistē divi dažādi naturāli skaitļi  $y_1$  un  $y_2$ , kuriem būtu spēkā  $x_1 = y_1^2$  un  $x_2 = y_2^2$ . Tad  $b^2 = y_1^2 y_2^2 = (y_1 y_2)^2$ , tātad  $b = y_1 y_2$  ir naturāls skaitlis pie visām naturālām  $y_1$  un  $y_2$  vērtībām;  $y_1^2 + y_2^2 = a^2$ . Izvēloties, piem.,  $y_1 = 3$  un  $y_2 = 4$ , tātad  $a = 5$ , iegūstam vienādojumu  $x^2 - 5^2 x + 12^2 = 0$ , kura saknes ir  $3^2$  un  $4^2$ .

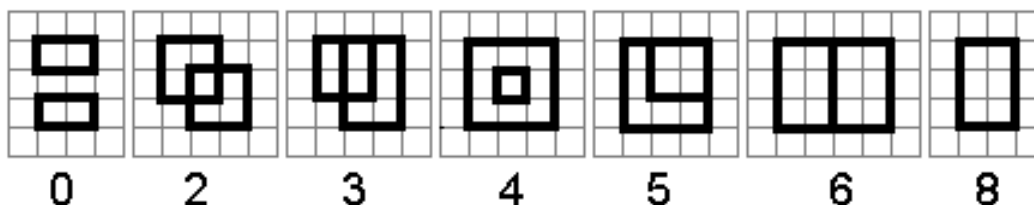
9.2. Ja caur punktiem B, M, O un N var novilkt riņķa līniju, tad  $\angle NBM + \angle NOM = 180^\circ$  un  $\angle NOM = 90^\circ$  (skat. 1. zīm.). Tā kā OM  $\Delta NMC$  ir gan augstums, gan mediāna, tad  $\Delta NMC$  ir vienādsānu trijstūris. CN ir bisektrise, tātad  $\angle ACN = \angle NCM = \angle CNM$ . No tā seko, ka  $AC \parallel MN$ . Tad  $\angle CAM = \angle NAM = \angle AMN$ , tātad  $\Delta MNA$  ir vienādsānu trijstūris. Iegūstam, ka  $AN = MN = MC$  un ANMC ir vienādsānu trapece, tāpēc  $\angle NAC = \angle MCA$ . Tā kā  $\Delta ABC$  ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tad  $\angle BAC = \angle NAC = 45^\circ$ .



9.3. Aplūkosim 11 tādus pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus no  $k$  līdz  $k + 10$  (ieskaitot), ka skaitļa  $k$  pēdējais cipars ir 1. Skaitlis  $k$  beidzas ar 1 un dalās ar 1;  $k + 4$  beidzas ar 5 – tātad dalās ar 5; skaitlis  $k + 10$  arī beidzas ar 1. Tātad, skaitļi  $k$ ,  $k + 4$  un  $k + 10$  nav skaisti. Starp  $k$  un  $k + 4$  ir 3 skaitļi; starp  $k + 4$  un  $k + 10$  ir 5 skaitļi. Tāpēc nevar būt vairāk nekā 5 pēc kārtas sekojoši *skaisti* skaitļi.

Piemēram, skaitļi 866, 867, 868, 869, 870 visi ir *skaisti*, tātad var būt 5 pēc kārtas sekojoši *skaisti* skaitļi.

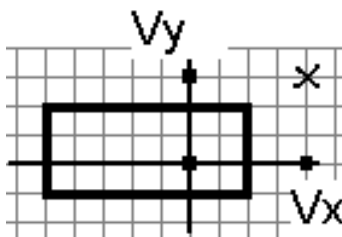
9.4. **Atbilde:** no astoņām divu taisnstūru virsotnēm vienlaicīgi otram arī taisnstūrim var piederēt 0, 2, 3, 4, 5, 6 vai 8 virsotnes, skat., piem., 2. zīm.



2. zīm.

**Pierādījums.** a) Pierādīsim, ka otram taisnstūrim nevar piederēt tieši viena virsotne.

Pieņemsim pretējo, ka šāda (*īpaša*) virsotne tomēr atrodas – tā ir vienīgā no astoņām virsotnēm, kas vienlaicīgi pieder arī otram taisnstūrim. Šī virsotne nevar sakrist ar kādu no otra taisnstūra virsotnēm, jo tad arī otra taisnstūra virsotnei, ar kuru sakrīt *īpašā* virsotne, būtu spēkā šī īpašība, t.i., būtu vismaz divas virsotnes ar minēto īpašību. Tātad *īpašā* virsotne var atrasties tikai otra taisnstūra iekšpusē vai arī uz kādas no tā malām. 3. zīmējumā ir parādīta situācija, kad *īpašā* virsotne ir otra taisnstūra iekšpusē.



3. zīm.

Aplūkosim, kur var atrasties tās divas virsotnes, kurām ar *īpašo* virsotni ir kopīga mala. Vienai virsotnei ( $V_x$ ) jāatrodas uz tās pašas horizontāles, uz kuras atrodas *īpašā* virsotne.  $V_x$  nevar atrasties otra taisnstūra iekšpusē vai uz tā malas, jo tad arī  $V_x$  būtu ar meklēto *īpašību*. Citai virsotnei ( $V_y$ ) jāatrodas uz tās pašas vertikāles, uz kuras atrodas *īpašā* virsotne.  $V_y$  nevar atrasties otra taisnstūra iekšpusē vai uz tā malas, jo tad arī  $V_y$  būtu ar minēto *īpašību*. Tātad gan  $V_x$ , gan  $V_y$  atrodas ārpus otra taisnstūra. Bet tādā gadījumā pirmā taisnstūra (kura trīs virsotnes ir *īpašā* virsotne,  $V_x$  un  $V_y$ ) iekšpusē atrodas kāda no otrā taisnstūra virsotnēm.

Līdzīgi analizē gadījumu, kad *īpašā* virsotne atrodas uz otra taisnstūra kontūra.

Esam ieguvuši pretrunu, tātad nevar būt tieši viena virsotne, kas pieder arī otram taisnstūrim.

b) Pierādīsim, ka otram taisnstūrim nevar piederēt tieši septiņas virsotnes.

Ieviesīsim koordinātu sistēmu un apskatīsim doto taisnstūru virsotņu koordinātes. Pieņemsim, ka viena taisnstūra ABCD virsotnes ir ar koordinātām  $A(x_{11}; y_{11})$ ,  $B(x_{11}; y_{12})$ ,  $C(x_{12}; y_{12})$  un  $D(x_{12}; y_{11})$ ; un ir spēkā sakarības  $x_{11} < x_{12}$  un  $y_{11} < y_{12}$ , bet otra taisnstūra (KLMN) virsotnes ir ar koordinātām  $K(x_{21}; y_{21})$ ,  $L(x_{21}; y_{22})$ ,  $M(x_{22}; y_{22})$  un  $N(x_{22}; y_{21})$ .

Pieņemsim pretējo – ir iespējams divus taisnstūrus novietot tā, ka tieši septiņas no astoņām virsotnēm vienlaikus pieder arī otram taisnstūrim. Šis apgalvojums ir līdzvērtīgs apgalvojumam, ka var novietot divus taisnstūrus tā, ka **tieši viena** no astoņām virsotnēm **nepieder** otram taisnstūrim. Varam pieņemt, ka šī vienīgā „nepiederošā” virsotne ir virsotne  $M(x_{22}; y_{22})$ .

Tātad virsotņu koordinātas vienlaicīgi saista šādas sakarības:

$$x_{11} \leq x_{21} \leq x_{12} \text{ un } y_{11} \leq y_{21} \leq y_{12} \text{ (jo } K(x_{21}; y_{21}) \text{ pieder taisnstūrim ABCD)} \quad (1)$$

$$x_{11} \leq x_{21} \leq x_{12} \text{ un } y_{11} \leq y_{22} \leq y_{12} \text{ (jo } L(x_{21}; y_{22}) \text{ pieder taisnstūrim ABCD)} \quad (2)$$

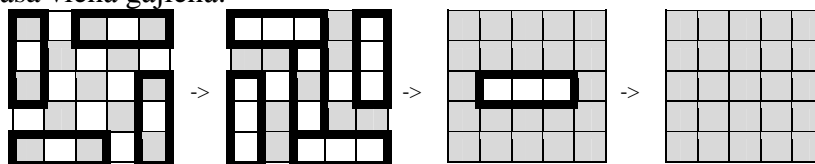
$$x_{11} \leq x_{22} \leq x_{12} \text{ un } y_{11} \leq y_{21} \leq y_{12} \text{ (jo } N(x_{22}; y_{21}) \text{ pieder taisnstūrim ABCD)} \quad (3)$$

Bet no (2) un (3) nosacījumiem seko, ka vienlaicīgi

$$x_{11} \leq x_{22} \leq x_{12} \text{ un } y_{11} \leq y_{22} \leq y_{12},$$

tātad arī virsotne  $M(x_{22}; y_{22})$  pieder taisnstūrim ABCD. Esam ieguvuši pretrunu, tātad pieņēmums, ka tieši viena virsotne nepieder otram taisnstūrim, ir aplams, tāpēc tieši septiņas no astoņām abu taisnstūru virsotnēm nevar vienlaikus piederēt arī otram taisnstūrim.

9.5. a) Tā kā galarezultātu nosaka tikai tas, cik reizes katrai rūtiņai ir mainīta krāsa, nav svarīgi, kādā secībā gājieni tiek izdarīti. 4. zīm. parādīts piemērs, kurā ar treknāku līniju apvilkta rūtiņas, kurām tiek mainīta krāsa vienā gājienā.



4. zīm.

b) Katrā rūtiņā ierakstīsim skaitli 1 vai 2 kā redzams 5. zīmējumā:

1	1	2	1	1
2	1	1	2	1
1	2	1	1	2

5. zīm.

Sākumā skaitļu summa pelēkajās rūtiņās ir 11. Pilnībā baltam laukumam (nav nevienas pelēkās rūtiņas) tā ir 0, bet pilnībā pelēkam laukumam tā ir vienāda ar visus ierakstīto skaitļu summu, t.i. 20. Mainot krāsojumu jebkurās trīs secīgās rūtiņās, skaitļu kopsумma iekrāsotajās rūtiņās mainās (palielinās, samazinās vai nemainās, t.i., izmainās par 0) par pāra skaitli:  $(1+1)-2=0$ ;  $(1+2)-1=2$ . Tā kā no nepāra skaitļa 11, tam pieskaitot vai atņemot pāra skaitļus, nevar iegūt pāra skaitli, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

10.1. Apzīmēsim  $b+c-a=2x$ ,  $a+c-b=2y$  un  $a+b-c=2z$ , tātad  $a=y+z$ ,  $b=x+z$  un  $c=x+y$ . Tā kā  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ir trijstūra malu garumi, tad  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ir pozitīvi skaitļi. Lietojot ieviestos apzīmējumus, doto nevienādību var pārrakstīt:

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left( \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) \right) \geq 3 \quad (1)$$

Ievērosim, ka patvaļīgiem pozitīviem skaitļiem  $x$  un  $y$  ir spēkā nevienādība  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$  (\*):

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0.$$

Pielietojot katrai iekavai pierādāmajā nevienādībā (1) nevienādību (\*), iegūstam

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left( \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) \right) \geq \frac{1}{2} (2 + 2 + 2) = 3.$$

Nevienādība (1) ir patiesa, tātad patiesa ir arī dotā nevienādība.

10.2. Apzīmējam kopējo vērtību ar  $x$ . Tad  $a_1 - a_2 = \mp x$ ,  $a_2 - a_3 = \mp \frac{x}{2}$ , ...,  $a_{20} - a_1 = \mp \frac{x}{20}$ . Saskaitot

$$x \left( \mp 1 \mp \frac{1}{2} \mp \dots \mp \frac{1}{20} \right) = 0. \text{ Ja } x \neq 0, \text{ tad iekava ir } 0. \text{ Izsakot to kā racionālu skaitli ar mazāko iespējamo}$$

saucēju, saskaitāmajā  $\frac{1}{19}$  skaitītājs nedalīsies ar 19, bet visos citos – dalīsies (jo 19 ir pirmskaitlis).

Tāpēc kopējais skaitītājs ar 19 nedalīsies, un daļa būs nesaīsināma. Tāpēc tā nav vesels skaitlis, tāpēc nav arī 0. Pretruna, tāpēc  $x=0$ .

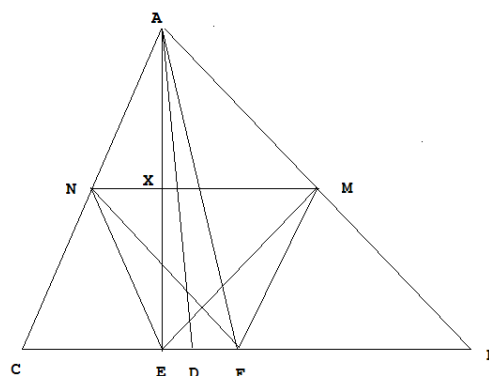
10.3. Ar E apzīmēsim no virsotnes A viltkā augstuma pamatu, ar F – malas BC viduspunktu. Pierādīsim, ka D atrodas starp E un F (vai ar tiem sakrīt, ja ABC ir vienādsānu trijstūris) (skat. 6. zīm.).

Ja  $AC=AB$  tad punkti E, D un F sakrīt. Ja malas ir dažādas, tad varam pieņemt, ka  $AC < AB$  (otru gadījumu analizē līdzīgi). Tā kā AD ir bisektrise, tad no bisektrišu īpašības seko, ka  $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} < 1 = \frac{CF}{FB}$ , tātad D ir pa kreisi (skat. 6.zīm.) no punkta F.

Lietojot Pitagora teorēmu, iegūstam

$$\frac{CE^2}{EB^2} = \frac{AC^2 - AE^2}{AB^2 - AE^2} < \frac{AC^2}{AB^2}, \text{ tātad punkts E atrodas pa kreisi no punkta F.}$$

EM ir taisnleņķa trijstūra AEB mediāna, tāpēc  $EM=AM=MB$ . Līdzīgi EN ir taisnleņķa trijstūra AEC mediāna, tāpēc  $EN=AN=NC$ . Tātad  $\triangle ANM = \triangle ENM$  (*mmm*), no kurienes seko, ka  $\angle NAM = \angle NEM$ . Tā kā N, M un F ir attiecīgi malu AC, AB un BC viduspunkti, tad  $\triangle ANM = \triangle FMN$  (*mmm*), tāpēc  $\angle NAM = \angle NFM$ . Tātad  $\angle NEM = \angle NAM = \angle NFM$ , tāpēc caur punktiem E, N, M un F var novilkrt riņķa līniju. Ja punkti E un F sakrīt (ABC vienādsānu) tad  $\angle NAM = \angle NDM$ . Ja E un F ir dažādi punkti, tad D atrodas riņķa iekšpusē uz hordas EF, tātad  $\angle NDM > \angle NEM = \angle NAM$ .



6. zīm.

10.4. Mazākais iespējamais dienu skaits festivālā ir 5.

Apzīmējam mūziķus ar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, tad viens iespējams uzstāšanos grafiks, piemēram, ir:

1. diena: 1, 2, 3, 4.


2. diena: 1, 5, 6, 7.

- 3. diena: 2, 5, 6, 7.
- 4. diena: 3, 5, 6, 7.
- 5. diena: 4, 5, 6, 7.

Pierādīsim, ka ar 4 dienām nepietiek. Ja festivālā ir 4 dienas, tad kopā ir  $4 \cdot 4 = 16$  uzstāšanās. Tas nozīmē, ka kāds mūziķis uzstāties ne vairāk kā 2 dienās. Pieņemsim, ka tas ir mūziķis 1. Lai 1 būtu uzstājies kopā ar katru citu mūziķi, nepieciešams, lai viņš vienā dienā muzicē kopā ar vieniem trīs mūziķiem (piemēram, 2, 3 un 4) un otrā dienā - kopā ar trim pārējiem mūziķiem (5, 6 un 7).

Ir vēl 2 dienas, kad uzstājušies 2, 3, 4, 5, 6, 7 (kaut kādās kombinācijās). Vismaz viens no viņiem ir uzstājies tikai vienā no šīm divām dienām. Pieņemsim, ka tas ir 2. Lai viņš būtu uzstājies kopā ar katru citu mūziķi, nepieciešams, lai vienā dienā muzicētu kopā, piemēram, 2, 5, 6 un 7.

Ja atlikušajā dienā neuzstājas kāds no mūziķiem 3 vai 4, tad viņš nebūs muzicējis kopā ar 5, 6 un 7. Savukārt, ja atlikušajā dienā uzstājas gan 3, gan 4, tad noteikti neuzstājas viens no mūziķiem 5, 6, 7, tad šis mūziķis nav uzstājies kopā ar 3 un 4. Tāpēc ar 4 dienām nepietiek.

**10.5.** Pieņemsim, ka ir izdevies kvadrātu ar izmēriem  $9 \times 9$  rūtiņas sagriezt uzdevumā prasītajās figūrās. Simetrijas dēļ var uzskatīt, ka šajā sadalījumā *stūrītis* ir orientēts tieši tā kā redzams zīmējumā: . (Ja tā nav, varam kvadrātu pagriezt ap centru tā, lai *stūrītis* nonākt šādā stāvoklī.) Izkrāsosim kvadrātu ar izmēriem  $9 \times 9$  rūtiņas trīs krāsās, kā parādīts 7. zīmējumā.

1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3	1

7. zīm.

Katrā krāsā ir iekrāsots vienāds rūtiņu daudzums – pa 27 katrā krāsā. Katrs taisnstūris ar izmēriem  $2 \times 3$  rūtiņas pārklāj tieši divas katras krāsas rūtiņas, tātad 13 šādi taisnstūri kopā pārklāj pa 26 katras krāsas rūtiņām. Tā kā *stūrītis* pārklāj divas vienas krāsas rūtiņas, tad prasītais sadalījums neeksistē.

**11.1. 1. risinājums:**

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = \frac{(a+b+c+d)^2}{8} - 3 \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2}{8} \leq 8.$$

**2. risinājums:**

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = \frac{(a+b+c+d)^2}{2} - 3 \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{2} - \frac{3(a+b+c+d)^2}{8} = 8,$$

kur otrajā solī izmantota nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko.

**11.2.** Izmantosim matemātisko indukciju, lai pierādītu, ka  $a_i = i, i=1; 2; \dots; n$ .

Pie  $n=1$  iegūstam  $a_1^3 = a_1^2$ , no kurienes  $a_1=1$ .

Pieņemsim, ka jau pierādīts, ka  $a_i=i$  pie  $i=1; 2; \dots; k$ . Apskatām vienādību

$$a_1^3 + \dots + a_k^3 + a_{k+1}^3 = (a_1 + \dots + a_k + a_{k+1})^2.$$

Atverot iekavas,

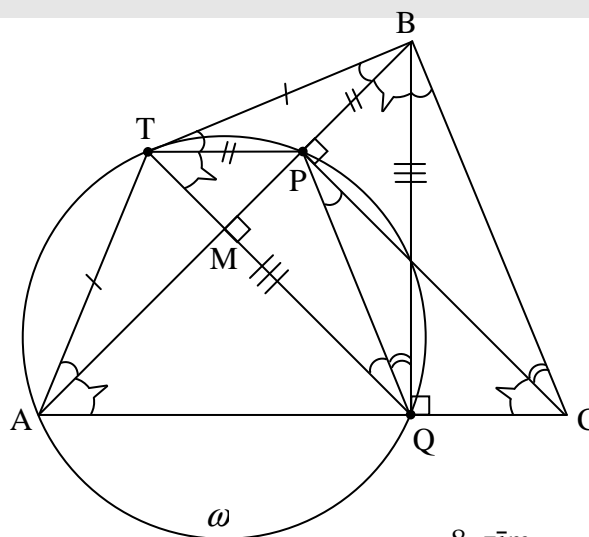
$$(a_1^3 + \dots + a_k^3) + a_{k+1}^3 = (a_1 + \dots + a_k)^2 + 2a_{k+1}(a_1 + \dots + a_k) + a_{k+1}^2,$$

no kurienes, izmantojot doto, dalot ar  $a_{k+1}$  un izmantojot induktīvo hipotēzi,

$$a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0.$$

Pēc Vjeta teorēmas vai nu  $a_{k+1} = -k$ , vai  $a_{k+1} = k+1$ . Tā kā virkne sastāv no pozitīviem skaitļiem, der tikai otrā iespēja.

11.3. 1) No dotā seko, ka  $\triangle ATB$  ir vienādsānu un  $\angle TAB = \angle TBA$  (skat. 8. zīm.).  
 $\angle BTP = \angle TAP$  (pēc hordas-pieskares un ievilkta leņķa īpašībām), Tāpēc  $\angle BTP = \angle TBP$  un  $\triangle BPT$  ir vienādsānu, t. i.,  $TP = BP$ .



2) No tā, ka  $\triangle ATB$  ir vienādsānu, seko, ka  $AM = MB$ . No tā un no  $MQ \perp AB$  savukārt seko, ka  $\triangle BQA$  ir vienādsānu. Tāpēc  $\angle BAQ = \angle ABQ = 45^\circ$ .  $\angle PTQ = \angle PAQ$  kā ievilkta leņķi, kas balstās uz vienu loka. Tādēļ  $\angle PTQ = \angle PBQ$ .

No tā, ka  $\angle BTP = \angle TBP$  un  $\angle PTQ = \angle PBQ$ , seko, ka  $\angle BTQ = \angle TBQ$ . Tāpēc  $\triangle BTQ$  ir vienādsānu un  $TQ = BQ$ . No tā un no 1), 2) seko, ka  $\triangle TPQ = \triangle BPQ$ . Tāpēc  $\angle TQP = \angle BQP$  (\*).

No  $\angle BMQ = \angle BPC = 90^\circ$  izriet, ka  $PC \parallel TQ$ . Tāpēc  $\angle QPC = \angle TQP$ . Savukārt ap Q, P, B un C var apvilkt riņķa līniju, jo  $\angle BQC = \angle BPC = 90^\circ$ . Tādēļ šajā riņķa līnijā  $\angle QPC = \angle QBC$  un  $\angle PQB = \angle PCB$  abos gadījumos kā leņķi, kas balstās uz vienu loku. No tā un no (\*) iegūstam, ka  $\angle QBC = \angle PCB$ .

Tālāk  $\angle ACP = 90^\circ - \angle PAC = 45^\circ = \angle ABQ$ . Iegūstam, ka  $\angle QBC + \angle ABQ = \angle PCB + \angle ACP$  vai  $\angle ABC = \angle ACB$ , no kā seko vajadzīgais.

11.4. Katram naturālam  $n$  aplūkosim virkni  $\{G_i\} i \geq 1$ , kur  $G_i$  ir atlikums, ko iegūst  $F_i$  dalot ar  $n$ .

Ja  $n=1$ , tad katrs Fibonači virknes loceklis dalās ar  $n$ .

Ja  $n>1$ , tad  $F_1$  un  $F_2$  atlikums, dalot ar  $n$ , ir 1, tātad  $G_1=G_2=1$ .

Aplūkosim virknes  $G$  īpašības:

1) Virkne  $\{G_i\}$  ir periodiska, jo katrai fiksētai  $n$  vērtībai virknes  $\{G_i\}$  elementi var pieņemt vērtības no 0 līdz  $n-1$ , tātad divu secīgu elementu pāris var pieņemt  $n^2$  dažādas vērtības. Tā kā virkne ir bezgalīga, tad kāds no pāriem atkārtosies, un tā kā divi secīgi virknes  $\{G_i\}$  elementi viennozīmīgi nosaka visus tālākos virknes elementus, tad virkne  $\{G_i\}$  būs periodiska.

2) Tā kā no katriem diviem Fibonači virknes locekļiem viennozīmīgi var iegūt visus iepriekšējos ( $F_{i-2}=F_i-F_{i-1}$ ,  $i \geq 3$ ), arī no katriem diviem secīgiem virknes  $\{G_i\}$  elementiem viennozīmīgi var atjaunot iepriekšējos elementus, tāpēc virknei  $\{G_i\}$  nav priekšperioda.

No 1) un 2) seko, ka virknē  $\{G_i\}$  noteikti ir tāds  $k$ , ka  $G_k=G_{k+1}=1$ ,  $k > 2$ , tad  $G_{k-1}=0$ . Tātad eksistē tāds Fibonači virknes loceklis  $F_{k-1}$ , kas dalās ar  $n$ .

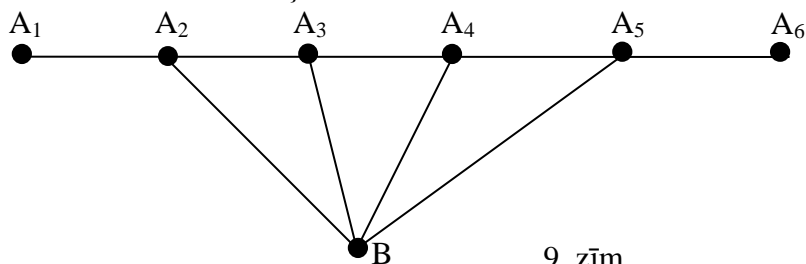
11.5. a) Pieņemsim, ka ir 2 pilsētas, īsākais ceļš starp kurām iet caur vismaz četrām citām pilsētām. Tad šajā ceļā noteikti ir 2 tādas pilsētas, starp kurām īsākais ceļš iet tieši caur 4 citām pilsētām.

Apzīmēsim šīs 2 pilsētas ar  $A_1$  un  $A_6$ , bet četras pilsētas starp tām – ar  $A_2, A_3, A_4$  un  $A_5$  (skat. 9.zīm.). Ja kāda cita pilsēta  $B$  ir savienota ar 4 vai vairāk no  $A_1, A_2, \dots, A_6$ , tad šo pilsētu var izmantot, lai „saīsinātu” īsāko ceļu starp  $A_1$  un  $A_6$ . Piemēram, zīmējumā redzamajā gadījumā posmu  $A_2 - A_3 - A_4 - A_5$  var aizstāt ar  $A_2 - B - A_5$ . Tāpēc šāda situācija nav iespējama.

Tāpēc, katra cita pilsēta  $B$  var būt savienota ne vairāk kā ar 3 no  $A_1, A_2, \dots, A_6$ . Līdz ar to, ceļu skaits ir ne vairāk kā:

- 5 ceļi ceļā no  $A_1$  uz  $A_6$ ;
- Pa 3 ceļiem no katras citas pilsētas  $B$  uz  $A_1, A_2, \dots, A_6$  (kopā, tas var dot  $4 \cdot 3 = 12$  ceļus, jo ir 4 citas pilsētas  $B$ ).
- 6 ceļi starp pārējām 4 pilsētām  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , jo no 4 pilsētām var izveidot  $(4 \cdot 3) : 2 = 6$  pilsētu pārus.

Tātad ir ne vairāk kā  $5+12+6=23$  ceļi.



9. zīm.

b) Ja  $A_1, A_2, \dots, A_6$  savieno, kā parādīts zīmējumā, katru citu pilsētu  $B_i, i=1, \dots, 4$ , savieno ar  $A_4, A_5$  un  $A_6$  un katras 2 pilsētas  $B_i$  un  $B_j$  savieno savā starpā, tad izveidojas 23 ceļi un īsākajā ceļā starp  $A_1$  un  $A_6$  ir 4 pilsētas. (Tajā noteikti jābūt  $A_2, A_3, A_4$  un vēl vienai pilsētai starp  $A_4$  un  $A_6$ .)

12.1. Varam apzīmēt  $x_i = 2 \cos \alpha_i, i=1, 2, \dots, n$ . Ievērojam, ka

$$\cos 3\alpha = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

no kurienes  $2 \cos 3\alpha = 8 \cos^3 \alpha - 6 \cos \alpha$ . Tāpēc

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = (2 \cos 3\alpha_1 + \dots + 2 \cos 3\alpha_n) + 6(\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n).$$

$$|x_1^3 + \dots + x_n^3| \leq |2 \cos 3\alpha_1| + \dots + |2 \cos 3\alpha_n| \leq 2n, \text{ k.b.j.}$$

12.2. Apskatīsim virknes, kurām vismaz viens no koeficientiem  $p$  vai  $q$  ir lielāks nekā 1 jeb  $p+q>2$ . Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka visi virknes  $\{a_i\}$  locekļi dod atlikumu 1, dalot ar  $p+q-1$  (tā kā  $p+q>2$ , tad  $p+q-1>1$ ).

**Indukcijas bāze:**

$a_1=a_2=1$ , tātad atlikums, dalot tos ar  $p+q-1$ , arī ir 1.

**Induktīvais pieņēmums:**

Pieņemsim, ka katram  $i \leq k$  dotās virknes loceklis  $a_i$  dod atlikumu 1, dalot ar  $p+q-1$ .

**Induktīvā pāreja:**

Apskatīsim virknes loekli  $a_{k+1}$  pēc moduļa  $p+q-1$ :

Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu,  $a_k$  un  $a_{k-1}$  dod atlikumu 1, dalot ar  $p+q-1$ .

Tātad  $a_{k+1} = p \cdot a_k + q \cdot a_{k-1} \equiv p \cdot 1 + q \cdot 1 = p+q \equiv (p+q-1) + 1$ , t.i.,  $a_{k+1}$  arī dod atlikumu 1, dalot ar  $p+q-1$ .

Tātad, ja  $p+q > 2$ , ir tāda  $n$  vērtība  $n=p+q-1$ , kurai neviens virknes  $\{a_i\}$  loceklis nedalās ar  $n$ .

Tā kā zināms, ka katram naturālam skaitlim  $n$  eksistē tāds virknes loceklis  $a_k$ , ka  $a_k$  dalās ar  $n$ , tad nevar būt  $p+q>2$ . Bet  $p$  un  $q$  ir naturāli skaitļi, tātad  $p=q=1$ .

*Piezīme.* Pie  $p=q=1$  tiek iegūta Fibonači skaitļu virkne, kurai minētās īpašības pierādījums dots 11.4. uzdevuma risinājumā.

12.3. Izmantosim īpašību, ka ja diviem trijstūriem ir vienādi augstumi, tad pamatu garumu attiecība ir vienāda ar trijstūru laukumu attiecību. No trijstūru mediānu attiecībām iegūstam, ka

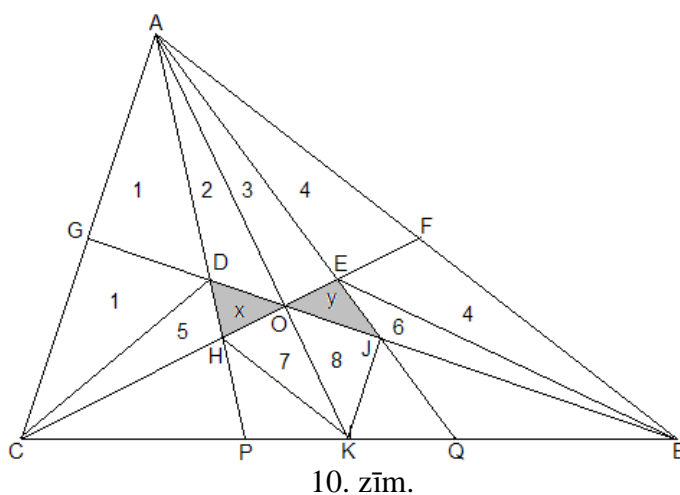
$$L_{OAG} = L_{OGC} = L_{OAF} = L_{OFB} = L_{OBK} = L_{OCK} = L^*$$

Vienlielus trijstūrus apzīmēsim ar vienādiem cipariem, mūs interesējošos trijstūrus atzīmēsim ar  $x$  un  $y$  (skat. 10. zīm.).

$$L_{ADO} = L_{ODC}, \text{ tātad } L_2 = L_x + L_5 \quad (1)$$

$$\text{un } L_{AOE} = L_{OEB}, \text{ tātad } L_3 = L_y + L_6 \quad (2)$$

$$\frac{L_{ADC}}{L_{ADB}} = \frac{CP}{CB - CP} = \frac{BQ}{CB - BQ} = \frac{L_{ABE}}{L_{ACE}}.$$



10. zīm.

$$\frac{2L_1}{L_2 + 2L^*} = \frac{2L_4}{L_3 + 2L^*}$$

$$\frac{2L_1}{3L^* - L_1} = \frac{2L_4}{3L^* - L_4}$$

Tātad  $L_1=L_4$  un  $L_2=L_3$ . (3)

$$L_{AOJ}=2L_{OJK} \text{ un } L_{OHA}=2L_{OHK},$$

$$L_3+L_y=2L_8 \quad (4)$$

$$\text{un } L_2+L_x = 2L_7 \quad (5)$$

$$\frac{L_{ABJ}}{L_{AKJ}} = \frac{L_{ACH}}{L_{AHK}}$$

$$\frac{2L_4 + L_6}{L_3 + L_y + L_8} = \frac{2L_1 + L_5}{L_2 + L_x + L_7}$$

Izmantojot vienādības (4) un (5), iegūstam:

$$\frac{2L_4 + L_6}{\frac{3}{2}(L_3 + L_y)} = \frac{2L_1 + L_5}{\frac{3}{2}(L_2 + L_x)}$$

Pareizinām abas puses ar  $\frac{3}{2}$  un ievietojam  $L_6=L_3-L_y$  (no (1)), un  $L_5=L_2-L_x$  (no (2)):

$$\frac{2L_4 + L_3 - L_y}{(L_3 + L_y)} = \frac{2L_1 + L_2 - L_x}{(L_2 + L_x)}$$

No (3) ievietojam  $L_4=L_1$  un  $L_3=L_2$ :

$$\frac{2L_1 + L_2 - L_y}{(L_2 + L_y)} = \frac{2L_1 + L_2 - L_x}{(L_2 + L_x)}$$

$$2(L_1 + L_2)(L_x - L_y) = 0$$

$L_1+L_2 \neq 0$ , tad jābūt  $L_x-L_y=0$  jeb  $L_x=L_y$ , k.b.j.

**12.4. a)** To var izdarīt, piemēram, izvietojot skaitļus pa apli pēc kārtas: 1234567.

Tā kā mums svarīgs tikai atlikums, dalot ar 7, tad vajadzības gadījumā pēc 7 sekojošos skaitļus 1, 2, 3... varam aizvietot ar 8, 9, 10... un uzskatīt, ka visas blakusesošo skaitļu summas ir secīgu naturālu skaitļu summas:

$$m + (m + 1) + \dots + (m + d - 1) = \frac{(2m + d - 1)d}{2} = md + \frac{(d - 1)d}{2}.$$

Pie fiksēta  $d$ , paņemot divus dažādus  $m$ :  $m_1 < m_2$ , šo vērtību atlikumi nevar sakrist, jo to starpība  $(m_2 - m_1)d$  ar 7 nedalās ( $d$  ir skaitlis no 2 līdz 6,  $(m_2 - m_1)$  – skaitlis no 1 līdz 6). Tāpēc visām dažādām  $m$  vērtībām no 1 līdz 7 visi atlikumi ir dažādi, tātad katrs no tiem parādās tieši vienu reizi.

**b)** To nevar izdarīt. Nevar pat panākt, lai aprakstītā īpašība izpildītos pie  $d=2$ : visu dažādo divu blakusesošo elementu summu summa ir  $2(1+2+\dots+8) = 72$ , kas dalās ar 8, bet visu iespējamo atlikumu, dalot ar 8, summa ir  $0+1+2+\dots+7 = 28$ , kas ar 8 nedalās.

**12.5.** Dosim risinājumu **b)** gadījumam. Skaidrs, ka, ja uzdevuma prasības var izpildīt ar 99 ierīces lietojumiem, tad ar 100 lietojumiem to arī var izdarīt.

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka, ja ir  $n$  kredītkartes, ( $n \geq 5$ ), tad ar  $n-1$  ierīces lietojumiem pietiek, lai atrastu gan kredītkarti ar vislielāko naudas summu, gan kredītkarti ar otro lielāko naudas summu.

**Induktīvā bāze.** Pierādīsim, ka starp 5 kredītkartēm ar 4 ierīces lietojumiem var atrast kredītkarti ar lielāko naudas summu.

Apzīmēsim kredītkartes ar 1, 2, 3, 4, 5. Pieņemsim, ka kredītkartē 1 ir vislielākā naudas summa, kredītkartē 2 – otra lielākā, utt., kredītkartē 5 – starp šīm piecām vismazākā naudas summa.

Iespējami 5 veidi, kā lietot ierīci:

- Ievieto 1, 2, 3, 4. Ierīce paziņo - 2.
- Ievieto 1, 2, 3, 5. Ierīce paziņo - 2.
- Ievieto 1, 2, 4, 5. Ierīce paziņo - 2.
- Ievieto 1, 3, 4, 5. Ierīce paziņo - 3.
- Ievieto 2, 3, 4, 5. Ierīce paziņo - 3.

Tātad ierīce vienmēr paziņos 2 vai 3. Tāpēc iespējams šāds algoritms kredītkaršu 1 un 2 identificēšanai.

1. Ievietosim ierīcē jebkuras 4 kredītkartes. Pieņemsim, ka ierīce paziņo  $A$ . Tad  $A=2$  vai  $A=3$ .

2. Izmēģināsim visas četru kredītkaršu kombinācijas, kas satur  $A$ . (Tādu pavisam ir 4, un viena no tām jau ir izmēģināta.)

a) Ja trijos no četriem gadījumiem ierīce paziņo  $A$ , tad  $A=2$ . 1 ir kredītkarte, kas nebija ievietota ierīcē vienīgajā gadījumā, kad ierīce neziņoja 2 (tad bija ievietotas kredītkartes 2, 3, 4, 5.)

b) Ja divos no četriem gadījumiem ierīce paziņo  $A$ , tad  $A=3$ . 2 ir kredītkarte, ko ierīce paziņo pārējos divos gadījumos. 1 ir kredītkarte, kas nebija ievietota ierīcē tajā reizē, kad ierīcē bija gan 2, gan arī  $A=3$ , un ierīce paziņoja  $A(=3)$ .

**Induktīvais pieņēmums.** Pieņemsim, ka starp  $5 \leq k \leq n$  kredītkartēm, lietojot ierīci  $k-1$  reizi, var noteikt kartes ar vislielāko un otro lielāko naudas summu.

**Induktīvā pāreja.** Ja mums ir  $n+1$  kredītkarte, tad:

1. Izvēlēsimies  $n$  kredītkartes (visas, atskaitot karti  $X$ ). Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, starp tām ar  $n-1$  ierīces lietojumu var atrast kredītkartes  $A$  un  $B$ , kas satur lielāko un otro lielāko naudas summu starp šīm  $n$  kredītkartēm.

2.  $n$ -tajā ierīces lietošanas reizē ievietosim ierīcē kredītkartes  $X$ ,  $A$ ,  $B$  un jebkuru citu kredītkarti. Iespējami šādi varianti:

a) Ierīce paziņo, ka otrā lielākā naudas summa ir kartē  $B$ . Tad kredītkartē  $X$  ir mazāk naudas nekā kredītkartēs  $A$  un  $B$ , tātad  $A$  un  $B$  joprojām paliek kartes ar vislielākajām naudas summām.

b) Ierīce paziņo, ka otrā lielākā naudas summa ir kartē  $A$ . Tad kredītkartē  $X$  ir visvairāk naudas, kartē  $A$  ir otra lielākā naudas summa.

c) Ierīce paziņo, ka otrā lielākā naudas summa ir kartē  $X$ . Tad kartē  $A$  ir visvairāk naudas, bet kartē  $X$  - otra lielākā naudas summa.