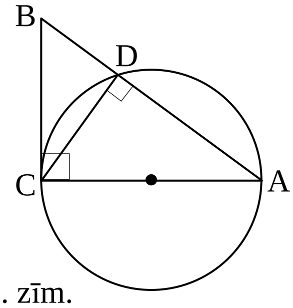
9.1. Apskatām vienādojumu, kuram b=2011, t.i., $x^2+ax+2011=0$. Pēc Vjeta teorēmas, ja x_1 un x_2 ir šī vienādojuma saknes, tad $x_1x_2=2011$ un $x_1+x_2=-a$. Tā kā 2011 ir pirmskaitlis, ja x_1 un x_2 ir veseli skaitļi, tad vai nu x_1 un x_2 ir 1 un 2011 (tātad a=-2012), vai x_1 un x_2 ir -1 un -2011 (tātad a=2012). Tā kā $-2011\le a\le 2011$, apskatāmajam vienādojumam nav veselu sakņu ne pie kādām pieļaujamajām a vērtībām. Tāpēc nav iespējams, ka **visiem** dotajiem vienādojumiem saknes ir veseli skaitļi.

9.2. Pieņemsim, ka ∠C=90°, AC>BC (skat. 1. zīm.). ∠CDA=90° (ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru), tātad CD ir ΔABC augstums un ΔABC~ΔACD~ΔCBD. Apzīmēsim AC=b, BC=a, AB=c, CD=h, $a^2+b^2=c^2$. Nevar būt, ka BD=BC (tad ΔCBD būtu vienādsānu ar taisnu leņķi pie pamata – nav iespējams), tāpēc AD=BC=a. No ΔABC~ΔACD seko $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CD}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{b}{h}$. (1)



1. zīm.

No ΔACD~ΔCBD seko $\frac{CD}{BD}=\frac{DA}{CD}\Rightarrow\frac{h}{c\text{-}a}=\frac{a}{h}\Rightarrow h^2=a(c-a)$. Ievietojot šo sakarību un vienādībā (1), iegūstam $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{a(c-a)}}=\sqrt{\frac{(c-a)(c+a)}{a(c-a)}}=\sqrt{\frac{c}{a}+1}$. Apzīmējot $\frac{c}{a}=k$, iegūstam $k=\sqrt{k+1}\Rightarrow k^2=k+1$. Iegūtā vienādojuma saknes ir $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Tā kā k>0, tad meklētā attiecība ir $\frac{c}{a}=k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9.3. Meklēto 81 skaitli varam atrast, piemēram, sekojošā veidā konstruējot 9 grupas par 9 skaitļiem katrā grupā.

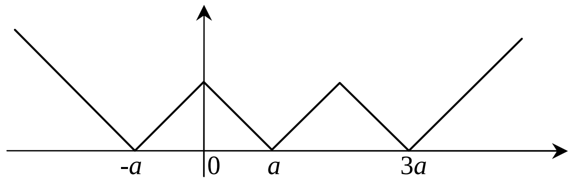
1. grupa	**2.grupa**	**...**	***i*-tā grupa**	**...**	**9.grupa**
111	212		$\overline{i1i}$		919
122	223		$\overline{i2(i+1)}$, ja i<9, vai $\overline{i2(i+1-9)}$, ja i≥9		921
133	234		$\overline{i3(i+2)}$, ja i<8, vai $\overline{i3(i+2-9)}$, ja i≥8		932
...	...		...		...
199	291		$\overline{i9(i-1)}$, ja i>1, vai 199, ja i=1		998

Viegli pārbaudīt, ka minētie skaitļi apmierina uzdevuma nosacījumus.

9.4. Četrus atsvarus A, B, C, D pa pāriem var sadalīt trīs dažādos veidos: AB un CD, AC un BD, AD un BC. Tātad pavisam tika veiktas trīs svēršanas.
Pieņemsim, ka atsvaru masas ir $x>y>z>t$. Tad divu svēršanu rezultāti vienmēr ir noteikti viennozīmīgi: $x+y>z+t$ un $x+z>y+t$. Trešajā svēršanā ir iespējami abi rezultāti.
1) Ja $x+t>y+z$, tad atsvars ar masu x vienmēr ir bijis uz smagākā kausa, tāpēc ir vissmagākais, bet nevar noteikt visvieglāko atsvaru (visi pārēji ir 1 reizi bijuši uz smagākā kausa un 2 reizes uz vieglākā).
2) Ja $x+t<y+z$, tad atsvars ar masu t vienmēr ir bijis uz vieglākā kausa, tāpēc ir visvieglākais atsvars, bet nevar noteikt vissmagāko atsvaru (visi pārēji ir 1 reizi bijuši uz vieglākā kausa un 2 reizes uz smagākā).
Tātad, saskaitot cik reizes katrs atsvars ir bijis uz vieglākā kausa un cik reizes – uz smagākā, var atrast vai nu vissmagāko, vai visvieglāko atsvaru – to kurš visas trīs reizes bijis uz smagākā / vieglākā kausa. Taču abus divus atsvarus - gan smagāko, gan vieglāko – vienlaicīgi noteikt nevar.

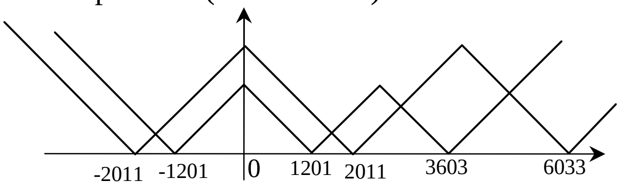
9.5. Pieņemsim, ka spēlētāji ap galdu pulksteņrādītāja virzienā sēž secībā A, B, C. Saskaitīsim cik kārtās katrs spēlētājs ir ieguvis 3 punktus. Spēlētājam A šo kārtu skaitu apzīmēsim ar a, spēlētājam B – ar b, spēlētājam C – ar c. Tad kopējais spēlētāja A kopsummā iegūto punktu skaits ir $3a-2c-b$, spēlētāja B punktu skaits ir $3b-2a-c$, bet spēlētāja C punktu skaits ir $3c-2b-a$. Pieņemsim, ka spēlēs beigās spēlētājs A kopsummā ieguva 0 punktus (citos gadījumos spriedumi līdzīgi). Tātad $3a-2c-b=0$ jeb $b=3a-2c$. Tad spēlētāja B iegūtu punktu kopsumma ir $3(3a-2c)-2a-c=7(a-c)$, bet spēlētāja C iegūto punktu kopsumma ir $7(c-a)$. Tātad pārējo spēlētāju iegūto punktu kopsumma dalās ar 7, tāpēc nevienam spēlētājam nevar būt 48 punkti. Spēlētāja B punktu summa var būt 49, ja, piemēram, A ir uzvarējis 7 kārtās, B ir uzvarējis 21 kārtā, bet C nav uzvarējis nevienā kārtā.

10.1. Aplūkosim funkcijas $f(x)=\left|\left|\left|x-a\right|-a\right|-a\right|$, kur a – reāls, pozitīvs skaitlis, grafiku (skat. 2. zīm.).



2. zīm.

Viegli ievērot, ka, lai atrisinātu doto vienādojumu, nepieciešams atrast divu šādu funkciju (pie a=2011 un a=1201) grafiku krustpunktus (skat. 3. zīm.).



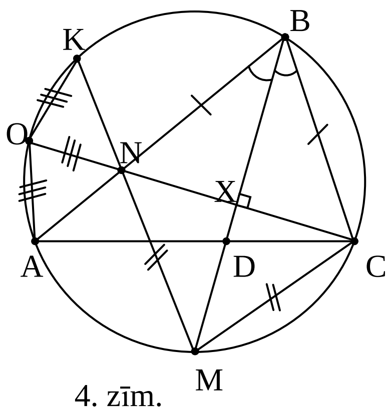
3. zīm.

Šiem grafikiem ir četri krustpunkti, kas arī dotā vienādojuma atrisinājumi:

$$x_1=\frac{-2011+(-1201)}{2}=-1606,\ x_2=\frac{1201+2011}{2}=1606,$$

$$x_3=\frac{2011+3603}{2}=2807,\ x_4=\frac{3603+6033}{2}=4818.$$

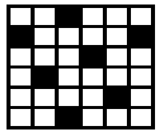
10.2. Trijstūrī NBC taisne BX ir gan bisektrise, gan augstums (skat. 4. zīm.). Tāpēc $NB=BC$ un $NX=XC$.
Trijstūrī NMC taisne MX ir gan mediāna, gan augstums. Tāpēc $NM=MC$.
$\Delta NBC \sim \Delta NOA$, tāpēc $OA=ON$; $\Delta NMC \sim \Delta NOK$, tādēļ $OK=ON$.
$AO=OK=ON$, k.b.j.



4. zīm.

10.3. a) Atbilde: nevar.

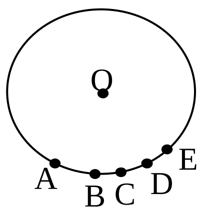
Katrā rindā un katrā kolonnā jābūt vismaz vienai aizkrāsotai rūtiņai (ja tādas rindas vai kolonnas nebūtu, tad no tās varētu izgriezt figūru 1×5 rūtiņas). Tā kā ir tieši sešas aizkrāsotas rūtiņas, tad katrā rindā un katrā kolonnā ir tieši viena aizkrāsota rūtiņa. Aplūkosim to kolonnu, kurā aizkrāsotā rūtiņa atrodas pirmajā rindā. Šajā kolonnā vienīgā aizkrāsotā rūtiņa atrodas pirmajā rindā, līdz ar to 2.-6.rindas rūtiņas veido neaizkrāsotu rūtiņu taisnstūri ar izmēru 1×5 rūtiņas.


5. zīm.

b) Atbilde: var, skat., piem., 5. zīm.

10.4. Ja $f(x)=a_n x^n+...+a_1 x+a_0$ ir polinoms, tad $f(x)-f(y)=a_n(x^n-y^n)+...+a(x-y)\vdots(x-y)$. Tā kā $f(2011)-f(11)=-900$ nedalās ar $2011-11=2000$, polinoms nevar pieņemt šādas vērtības.

10.5. Tā kā vajag izveidot divus trijstūrus bez kopīgām virsotnēm, tad būs vajadzīgi vismaz seši punkti. 6. zīm. parādīts piemērs ar 6 punktiem, no kuriem nevar izveidot divus platleņķa trijstūrus bez kopīgām virsotnēm. Punkts O ir riņķa līnijas centrs un punkti A, B, C, D, E atrodas uz riņķa līnijas, pie tam ∠AOE ir šaurs. Tā kā ir tikai seši punkti un jāizveido divi trijstūri, tad katram punktam jābūt kāda trijstūra virsotnei. Bet jebkurš no trijstūriem, kura viena virsotne ir O, ir šaurleņķu. Tātad $n \geq 7$.



6. zīm.

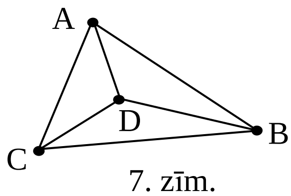
Pierādīsim, ka ar septiņiem punktiem vienmēr pietiek.

Lemma 1. *Ja izliekts četrstūris nav taisnstūris, tad kādas trīs no tā virsotnēm veido platleņķa trijstūri.*

Pierādījums. Izliekta četrstūra iekšējo leņķu summa ir 360°, tātad, ja ne visi tā leņķi ir 90°, tad kāds no leņķiem būs lielāks par 90° – šī virsotne un divas tās blakus virsotnes veido platleņķa trijstūri.

Lemma 2. *Ja dots trijstūris ABC un punkts D tā iekšpusē, tad vismaz divi no trijstūriem ABD, BCD, CAD ir platleņķa.*

Pierādījums. Aplūkosim leņķus ADB, BDC, CDA (skat. 7. zīm.). Šo leņķu summa ir 360° un katrs no tiem ir mazāks nekā 180°, tātad vismaz divi no šiem leņķiem ir lielāki par 90°.



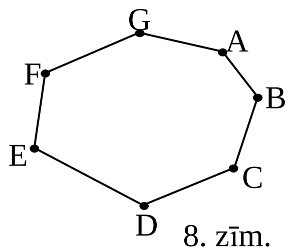
7. zīm.

Apskatīsim divus gadījumus, kā dotie 7 punkti var būt izvietoti.

1) Tie veido izliektu septiņstūri, skat. 8. zīm.

Izliekta septiņstūra iekšējie leņķi ir mazāki par 180° un to summa ir $180°\cdot(7-2)$. Pieņemsim, ka šauro vai taisno leņķu skaits ir vismaz 4, tad šo četru leņķu summa nepārsniedz 360° un pārējo trīs leņķu summa ir mazāka par 3·180°, tātad visu septiņu leņķu summa ir mazāka par 5·180° - pretruna. Tātad šauro vai taisno iekšējo leņķu skaits nav lielāks par 3.

Aplūkosim virsotņu pārus (A, D), (D, G), (G, C), (C, F), (F, B), (B, E), (E, A). Tā kā no leņķiem ar virsotnēm punktos A, B, C, D, E, F, G ne vairāk kā trīs leņķi nav plati un katrs no leņķiem pāros parādās tieši divas reizes, tad kādā no pāriem būs divi plati leņķi. Šie divi punkti kopā ar blakus virsotnēm veido divus platleņķa trijstūrus bez kopīgiem punktiem.



8. zīm.

2) Dotie septiņi punkti neveido izliektu septiņstūri.

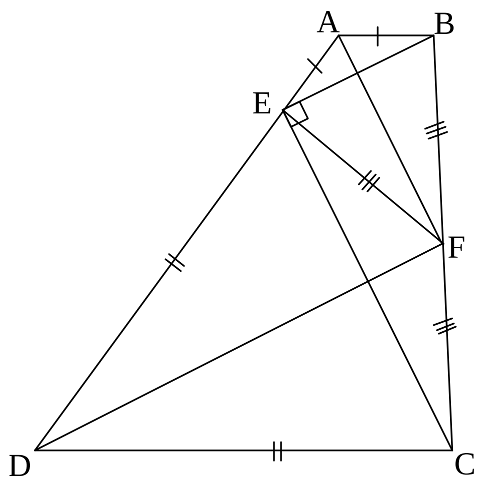
Tātad varam izvēlēties četrus punktus un apzīmēt tos tā, ka A, B, C veido trijstūri un D atrodas tā iekšpusē; pārējos punktus apzīmēsim ar E, F, G. No Lemmas 2 seko, ka vismaz divi no trijstūriem ABD, BCD, CAD ir platleņķa; varam pieņemt, ka tie ir ΔABD un ΔBCD. Ja punkti E, F, G, C neveido taisnstūri, tad no tiem var izveidot platleņķa trijstūri (saskaņā ar Lemmām 1 un 2), un A, B, D veido otru platleņķa trijstūri. Ja E, F, G, C veido taisnstūri, tad E, F, G, A neveido taisnstūri (citādi A un C atrastos vienā punktā), un no tiem var izveidot platleņķa trijstūri, otru platleņķa trijstūri veido punkti B, C, D.

11.1. Apskatīsim vektorus ar koordinātēm $(a;b;c)$ un $(m;n;p)$. Tad no dotajām sakarībām seko, ka šo vektoru garums ir 1. Savukārt izteiksme $am+bn+cp$ izsaka šo vektoru skalāro reizinājumu. Tā kā $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)$ un $-1\le\cos\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)\le 1$, tad $-1\le\vec{x}\cdot\vec{y}=am+bn+cp\le 1$, k.b.j.

11.2. Uz malas AD var atrast tādu iekšēju punktu E, ka AE=AB un ED=CD (skat. 9. zīm.).

$$\angle BEC=180°-\left(\frac{180°-\angle EAB}{2}+\frac{180°-\angle EDC}{2}\right)=$$

$=\dfrac{\angle EAB+\angle EDC}{2}=90°$, tātad trijstūrim BEC apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas BC viduspunktā F un EF=BF=CF. Aplūkosim trijstūrus ABF un AEF: AF kopīgā mala, AB=AE un BF=EF, tāpēc ΔABF=ΔAEF (*mmm*), un AF ir ∠BAD bisektrise. Līdzīgi pierāda, ka DF ir ∠ADC bisektrise. Tātad F ir šo bisektrišu krustpunkts, k.b.j.



9. zīm.

11.3. Atbilde: $p=3$.

Pārbaudām, ka $p=2$ neder, bet $p=3$ der. Ja $p>3$, šķirosim gadījumus: 1) $p=3k+1$ un 2) $p=3k+2$.

1) Ja $p=3k+1$, tad p^n katram *n* dod atlikumu 1, dalot ar 3, tātad $p^{p^2-5}+2$ dalās ar 3.

2) Ja $p>3$, tad p ir nepāra skaitlis un p^2-5 ir pāra skaitlis. Tad $p^{2m}=(3k+2)^{2m}=\left(9k^2+6k+3+1\right)^m=\left(3t+1\right)^m$ dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tātad arī šajā gadījumā $p^{p^2-5}+2$ dalās ar 3.

Tā kā $p^{p^2-5}+2>3$ un dalās ar 3, tas nav pirmskaitlis.

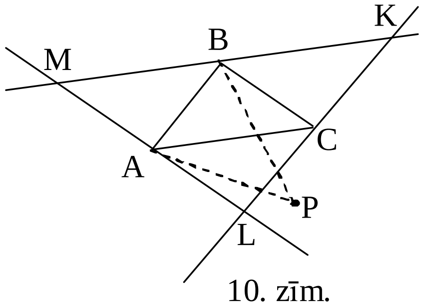
11.4. Katru punktu nosacīti sadalīsim divās daļās: tajā, kas atrodas loka sākumā un tajā, kas atrodas loka beigās. Pieņemsim, ka uz katra loka uzrakstītais skaitlis ir tā sākuma un beigu *puspunktu* summa. Ar z_s apzīmēsim zaļā sākuma *puspunkta vērtību*, ar z_b – zaļā beigu *puspunkta* vērtību, ar s_s – sarkanā sākuma *puspunkta* vērtību un ar s_b – sarkanā beigu *puspunkta* vērtību. Iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} z_s+s_b=1\\ z_s+z_b=2\\ s_s+s_b=3\\ s_s+z_b=4 \end{cases},$$

kuras atrisinājums ir z_s=0, z_b=2, s_s=2, s_b=1.

Katrs punkts ir viena loka sākums un viena loka beigas, tātad meklējamajā summā katra punkta *vērtība* tiek ieskaitīta tieši vienu reizi. Līdz ar to visu uz lokiem uzrakstīto skaitļu summa ir $707(s_s+s_b)+1304(z_s+z_b)=707\cdot 3+1304\cdot 2=4729$.

11.5. No visiem trijstūriem ar virsotnēm dotajos punktos izvēlamies trijstūri ABC ar vislielāko laukumu (vai vienu no šādiem trijstūriem. ja to ir vairāk). Caur katru trijstūra ABC virsotni novilksim taisni, kas ir paralēla trijstūra pretējai malai. Šīs taisnes krustojas punktos K, L, M (skat. 10. zīm.).
Aplūkosim taisni KL. Tā dala plakni divās pusplaknēs. Pierādīsim, ka visi dotie punkti atrodas tajā pusplaknē, kurā atrodas trijstūris ABC. Tiešām, ja kāds no dotajiem punktiem P atrastos pretējā pusē, tad trijstūra ABP laukums būtu lielāks par trijstūra ABC laukumu (šiem trijstūriem ir vienādi pamati, bet trijstūra ABP augstums ir lielāks par trijstūra ABC augstumu). Līdzīgi, aplūkojot taisnes ML un MK, mēs secinām, ka visi dotie punkti pieder trijstūrim MKL. Tā kā $S_{\text{MKL}} = 4 \cdot S_{\text{ABC}} \le 4\text{cm}^2$, tad prasītais apgalvojums pierādīts.



10. zīm.

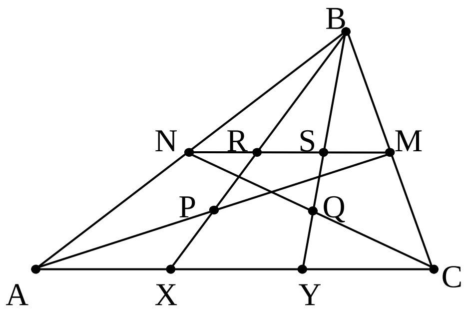
12.1. Atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus nevienādībā

$$\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}\right)^2>0,$$

iegūstam $2\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{12}-4>0$,

no kurienes savukārt seko $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}-2>\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{12}-2\sqrt[3]{2}$.

12.2. $\Delta\text{APX} = \Delta\text{MPR}$, jo $\text{AX} \parallel \text{RM}$ un $\text{AP} = \text{PM}$ (skat. 11. zīm.). Tādēļ $\text{AX} = \text{RM}$. Savukārt RM ir ΔXBC viduslīnija, tāpēc $\text{XC} = 2\text{RM}$.
Iegūstam, ka $2\text{AX} = \text{XC}$ jeb $2\text{AX} = \text{XY} + \text{YC}$ (1).
Līdzīgi iegūstam, ka $2\text{YC} = \text{AX} + \text{XY}$ (2).
No (1) atņemot (2), iegūstam $\text{AX} = \text{YC}$. Ievietojot to (1), iegūstam $2\text{AX} = \text{XY} + \text{AX}$ jeb $\text{AX} = \text{XY}$, tātad $\text{AX} = \text{XY} = \text{YC}$, k.b.j.



11. zīm.

12.3. Pieņemsim pretējo, ka tādi skaitļi m un n eksistē. $m^3 = (2n)^{2n} - 1 = \left((2n)^n - 1\right)\left((2n)^n + 1\right)$. Tā kā $(2n)^n - 1$ un $(2n)^n + 1$ ir savstarpēji pirmskaitļi, tad

$$(2n)^n - 1 = a^3,\ (2n)^n + 1 = b^3.$$

Iegūstam pretrunu: $2 = b^3 - a^3 = (b-a)\left(b^2 + ab + a^2\right)$, jo $b^2 + ab + a^2 > 2$.

12.4. Pieņemsim, ka kādam x $g(x) > x$. Tad $g(g(x)) > g(x)$, jo funkcija ir stingri augoša un $g(g(x)) + g(x) > x + x = 2x$ – pretruna.
Gadījumā, ja $g(x) < x$, tad $g(g(x)) < g(x)$, jo funkcija augoša, un $g(g(x)) + g(x) < x + x = 2x$ – pretruna.
Atliek vienīgi gadījums, kad $g(x) = x$. Pārbaude liecina, ka šis atrisinājums der.

12.5. Ar indukciju pierādīsim vispārīgāku apgalvojumu.

Virkni, kas sastāv no cipariem c_1, c_2, ..., c_k sauc par universālu, ja no tās, izsvītrojot dažus ciparus, var iegūt jebkuru virkni, kurā katrs no cipariem c_1, c_2, ..., c_k ir tieši vienu reizi. Tad universālas virknes garums nevar būt mazāks par $\frac{k(k+1)}{2}$.

Indukcijas bāze. Ja k=1, tad $\frac{k(k+1)}{2}=1$ un netukšā virknē ir vismaz 1 simbols.

Tagad pieņemsim, ka apgalvojums ir pierādīts k cipariem un pierādīsim to k+1 ciparam. Pieņemsim, ka ir *universāla* virkne garumā S. Pēc Dirihlē principa vismaz viens no cipariem c nav starp pirmajiem k *universālās* virknes cipariem. Izsvītrosim visus ciparus c un visus ciparus, kas ir pirms pirmā cipara c. Atlikušās virknes garums būs ne vairāk kā $S-k-1$, jo tika izsvītrots vismaz viens c un vismaz k cipari pirms pirmā c.

Atlikusī virkne ir *universāla*, jo, ja virkni $ca_1a_2...a_k$ varēja iegūt no sākotnējās virknes, tad šīs virknes daļa $a_1a_2...a_k$ atradās pēc pirmā c, un tāpēc neviens no tās cipariem netika izsvītrots. Tāpēc pēc induktīvā pieņēmuma $S-k-1\geq\frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow S\geq\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.