Baltijas Ceļš 2000

Oslo, 2000. gada 4. novembris

1. uzdevums. Punkts K atrodas trijstūra ABC iekšpusē. M un N ir tādi punkti, ka M un K atrodas taisnes AB pretējās pusēs, un N un K atrodas taisnes BC pretējās pusēs.

Pieņemsim, ka $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \sphericalangle NBC = \sphericalangle NCB = \sphericalangle KAC = \sphericalangle KCA$. Pierādīt, ka $MBNK$ ir paralelograms.

2. uzdevums. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kurā $\sphericalangle BAC = 90°$. M ir AB viduspunkts. Taisne, kas iet caur A un ir perpendikulāra CM, krusto malu BC punktā P. Pierādīt, ka

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMP.$$

3. uzdevums. Dots trijstūris ABC, kurā $\sphericalangle BAC = 90°$ un $AB \neq AC$. Punkti D, E, F ir izvietoti attiecīgi uz malām BC, CA, AB tā, ka $AFDE$ ir kvadrāts. Pierādīt, ka taisne BC, taisne FE un taisne, kas pieskaras punktā A trijstūra ABC apvilktajai riņķa līnijai, krustojas vienā punktā.

4. uzdevums. Dots trijstūris ABC, kurā $\sphericalangle BAC = 120°$. Punkti K un L atrodas attiecīgi uz malām AB un AC. BKP un CLQ ir vienādmalu trijstūri, kas konstruēti ārpus trijstūra ABC.

Pierādīt, ka $PQ \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + AC)$.

5. uzdevums. ABC ir tāds trijstūris, ka

$$\frac{BC}{AB - BC} = \frac{AB + BC}{AC}.$$

Aprēķināt attiecību $\sphericalangle BAC : \sphericalangle ACB$.

6. uzdevums. Fredekam pieder privāta viesnīca. Viņš apgalvo, ka, lai kādi $n \geq 3$ viesi apmeklētu viesnīcu, starp tiem var izvēlēties divus tādus, kuriem starp pārējiem viesiem ir vienāds skaits paziņu un kuriem starp pārējiem viesiem ir vai nu kopīgs paziņa, vai arī kopīgs nepazīstamais. Kādām n vērtībām Fredekam ir taisnība?

(Ja viesis A pazīst B, tad arī B pazīst A.)

7. uzdevums. Slēdži ir izvietoti tabulas 40×50 veidā. Katram slēdzim ir divi stāvokli: "ieslēgts" un "izslēgts". Pārslēdzot slēdzi, tā stāvoklis un jebkura tajā pašā rindā vai tajā pašā kolonnā esoša slēdža stāvoklis nomainās uz pretējo.

Pierādīt, ka slēdžu tabulu ar secīgām slēdžu pārslēgšanām var pārveidot no stāvokļa, kurā visi slēdži ir izslēgti, uz stāvokli, kurā visi slēdži ir ieslēgti, un noskaidrot mazāko pārslēgšanu skaitu, ar kuru to var izdarīt.

8. uzdevums. Četrpadsmit draugi sarīkoja viesības. Viens no viņiem, Fredeks, gribēja aiziet laikus gulēt. Viņš atvadījās no 10 draugiem, aizmirsa par pārējiem 3, un nolikās gulēt. Pēc kāda laika viņš atgriezās viesībās, atvadījās no 10 draugiem (ne obligāti tiem pašiem, no kuriem iepriekš), un aizgāja gulēt. Vēlāk Fredeks vēl vairākkārt atgriezās, katru reizi atvadījās tieši no 10 draugiem, un aizgāja atpakaļ gulēt. Pēc tam, kad viņš bija atvadījies no katra no saviem draugiem vismaz vienreiz, viņš vairs neatgriezās. Nākamajā rītā Fredeks saprata, ka viņš bija atvadījies no katra no trīspadsmit draugiem atšķirīgu skaitu reižu! Kāds ir mazākais iespējamais skaits reižu, kuras Fredeks atgriezās viesībās?

9. uzdevums. Pa šaha galdiņu ar izmēriem $2k \times 2k$, kas sastāv no vienības kvadrātiņiem, lēkā varde. Katrs vardes lēciens ir garumā $\sqrt{1+k^2}$ un pārvieto vardi no kvadrātiņa centra uz cita kvadrātiņa centru. Daži kvadrātiņi, skaitā m, ir iezīmēti ar "x" zīmi, un visi kvadrātiņi, uz kuriem varde var aizlēkt no kvadrātiņa ar "x" zīmi, ir iezīmēti ar "o" zīmi (neatkarīgi no tā, vai tie jau ir iezīmēti ar "x" zīmi). Pavisam ir n kvadrātiņu ar "o" zīmi. Pierādīt, ka $n \geq m$.

10. uzdevums. Uz tāfeles ir uzrakstīti divi veseli pozitīvi skaitļi. Sākumā viens no tiem ir 2000 un otrs ir mazāks par 2000. Ja abu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais m ir vesels skaitlis, ir atļauta šāda operācija: vienu no skaitļiem nodzēst un aizvietot ar m. Pierādīt, ka šo operāciju var veikt ne vairāk kā desmit reizes. Uzrādīt piemēru, kurā šī operācija ir veikta desmit reizes.

11. uzdevums. Veselu pozitīvu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$ ir tāda, ka katriem m un n ir spēkā: ja n dalās ar m un $m < n$, tad a_n dalās ar a_m un $a_m < a_n$. Atrast mazāko iespējamo a_{2000} vērtību.

12. uzdevums. Dots, ka $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ir tādi veseli pozitīvi skaitļi, ka neviens no tiem nav neviena cita sākuma fragments (piemēram, 12 ir skaitļu 12, 125 un 12405 sākuma fragments). Pierādīt, ka

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} < 3.$$

13. uzdevums. Dots, ka $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir tāda veselu skaitļu aritmētiska progresija, ka a_i dalās ar i visiem $i = 1, 2, \ldots, n-1$ un a_n nedalās ar n. Pierādīt, ka n ir pirmskaitļa pakāpe (iespējams, ar kāpinātāju 1).

14. uzdevums. Atrast visus tādus veselus pozitīvus skaitļus n, ka n ir 100 reizes lielāks par skaitļa n pozitīvo dalītāju skaitu.

15. uzdevums. Dots, ka n ir vesels pozitīvs skaitlis, kas nedalās ne ar 2, ne ar 3. Pierādīt, ka visiem veseliem skaitļiem k skaitlis $(k+1)^n - k^n - 1$ dalās ar $k^2 + k + 1$.

16. uzdevums. Pierādīt, ka visiem reāliem pozitīviem skaitļiem a, b, c ir spēkā

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 - ac + c^2}.$$

17. uzdevums. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ xy + yz + zt + tx = 4 \\ xyz + yzt + ztx + txy = 3 \\ xyzt = -1 \end{cases}$$

18. uzdevums. Atrisināt reālos pozitīvos skaitļos vienādojumu

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2 \cdot \left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right).$$

19. uzdevums. Dots reāls skaitlis $t \geq \frac{1}{2}$ un vesels pozitīvs skaitlis n. Pierādīt, ka

$$t^{2n} \geq (t-1)^{2n} + (2t-1)^{n}.$$

20. uzdevums. Katram veselam pozitīvam skaitlim n

$$x_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n-1)(4n+1)}{(2n)(2n+2)\ldots(4n-2)(4n)}.$$

Pierādīt, ka $\frac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \frac{2}{n}$.