Language: **Latvian (Lettish)** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Trešdien, 2008. gada 16. jūlijā

1. uzdevums Punkts H ir šaurleņķu trijstūra ABC augstumu krustpunkts. Riņķa līnija, kas iet caur punktu H un kuras centrs ir malas BC viduspunkts, krusto taisni BC punktos A_1 un A_2. Līdzīgi riņķa līnija, kas iet caur punktu H un kuras centrs ir malas CA viduspunkts, krusto taisni CA punktos B_1 un B_2, bet riņķa līnija, kas iet caur punktu H un kuras centrs ir malas AB viduspunkts, krusto taisni AB punktos C_1 un C_2. Pierādiet, ka punkti A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 atrodas uz vienas riņķa līnijas.

2. uzdevums (a) Pierādiet, ka

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1,$$

ja x, y, z ir reāli skaitļi, kuri visi atšķiras no 1 un apmierina nosacījumu $xyz = 1$.

(b) Pierādiet, ka augšminētā nevienādība pārvēršas par vienādību bezgalīgi daudziem no vieninieka atšķirīgu racionālu skaitļu x, y, z trijniekiem, kuri apmierina nosacījumu $xyz = 1$.

3. uzdevums Pierādiet, ka bezgalīgi daudziem veseliem pozitīviem skaitļiem n skaitlis $n^2 + 1$ dalās ar kādu pirmskaitli, kas ir lielāks nekā $2n+\sqrt{2n}$.

Language: Latvian

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Katrs uzdevums ir 7 punktus vērts

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Ceturtdien, 2008. gada 17. jūlijā

4. uzdevums Noskaidrojiet, kādām funkcijām $f : (0,\infty) \to (0, \infty)$ (tātad f ir funkcijas, kuras definētas visiem pozitīviem reāliem skaitļiem un pieņem tikai pozitīvas reālas vērtības) piemīt īpašība: ja pozitīvi reāli skaitļi w, x, y, z apmierina nosacījumu $wx = yz$, tad

$$\frac{\left(f(w)\right)^2+\left(f(x)\right)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}.$$

5. uzdevums Doti veseli pozitīvi skaitļi n un k, kur $k \geq n$ un $k-n$ ir pāra skaitlis. Apskatīsim $2n$ spuldzes, kurām piešķirti numuri $1, 2, \ldots, 2n$. Katra spuldze var atrasties jebkurā no diviem stāvokļiem: ieslēgta vai izslēgta. Sākotnēji visas spuldzes ir izslēgtas. Apskatīsim *soļu* virknes: katrā solī tieši viena spuldze maina savu stāvokli (no ieslēgtas kļūst par izslēgtu vai arī no izslēgtas – par ieslēgtu).

Ar N apzīmējam tādu virkņu skaitu, kurām piemīt īpašība: virkne sastāv no k soļiem, pēc kuru izpildes visas spuldzes ar numuriem no 1 līdz n ieskaitot ir ieslēgtas, bet visas spuldzes ar numuriem no $n + 1$ līdz $2n$ ieskaitot ir izslēgtas.

Ar M apzīmējam tādu virkņu skaitu, kurām piemīt īpašība: virkne sastāv no k soļiem, pēc kuru izpildes visas spuldzes ar numuriem no 1 līdz n ieskaitot ir ieslēgtas, bet visas spuldzes ar numuriem no $n + 1$ līdz $2n$ ieskaitot ir izslēgtas, turklāt šo soļu izpildes gaitā neviena spuldze ar numuru no $n + 1$ līdz $2n$ ieskaitot ne reizi nebija ieslēgta.

Aprēķiniet attiecību N/M.

6. uzdevums Pieņemsim, ka $ABCD$ ir izliekts četrstūris un $BA \neq BC$. Ar ω_1 un ω_2 apzīmēsim attiecīgi trijstūros ABC and ADC ievilktās riņķa līnijas. Pieņemsim, ka eksistē tāda riņķa līnija ω, kas pieskaras staram BA aiz punkta A un staram BC aiz punkta C, kā arī taisnēm AD un CD. Pierādiet, ka riņķa līniju ω_1 un ω_2 kopējās ārējās pieskares krustojas punktā, kas pieder riņķa līnijai ω.