

Jauno matemātiķu konkurss 1999./2000.m.g.

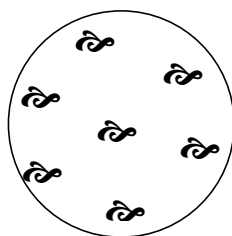
1. kārtas uzdevumi

1. Dota skaitļu virkne:

1; 5; 13; 29; 61; 125; ...

Vai skaitlis 2000 pieder šai virknei? Vai vari pateikt, kā veidojas šī virkne?

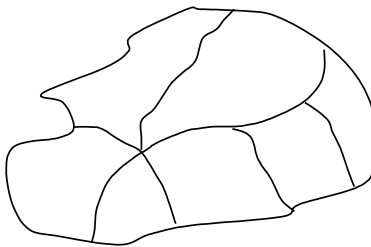
2. Pēterītim bija dzimšanas diena, uz kuru tas uzaicināja 6 savus draugus. Māmiņa uzciņāja bērņus ar torti, kurai virsū bija izvietotas 7 marcipāna puķītes tā, kā parādīts 1. zīmējumā. Palīdzi Pēterītim sagriezt torti ar 3 taisniem griezieniem 7 daļās tā, lai katrā daļā būtu tieši viena puķīte!



1. zīm.

3. Datorveikalā notika vecākas paaudzes datoru izpārdošana. Sākumā datora cenu pazemināja par 20%. Pēc kāda laika, kad to neviens nepirka, tā cenu atkal pazemināja par 20%. Taču arī tas nedeķa gaidītos rezultātus, tāpēc veica vēl vienu cenas pazemināšanu par 20%. Ar cik % lielu atlaidi, salīdzinot ar sākotnējo cenu, tagad var nopirkt šo datoru?

4. Akvarelijā ir 7 novadi. Kartogrāfu birojs grib izdot šīs valsts karti (skat. 2. zīm.). Cik krāsas ir nepieciešamas, lai divi novadi, kuriem ir kopīga kāda robežas daļa, nebūtu izkrāsoti vienādā krāsā (viens novads ir nokrāsots vienā krāsā). Ja diviem novadiem ir kopīgs tikai viens punkts, tad tie var būt izkrāsoti arī vienādās krāsās. Parādi, kā ar šīm krāsām ir jāizkrāso minētā karte!



2. zīm.

5. Rūķis iedomājās vienu no skaitļiem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Pūķis grib noskaidrot šo skaitli. Viņš var uzdot Rūķim jautājumu, vai iedomātais skaitlis ir kāds no nosauktajiem (un nosaukt tos), savukārt Rūķis var atbildēt tikai ar "jā" vai "nē". (Piemēram, Pūķis var jautāt: "Vai iedomātais skaitlis ir kāds no skaitļiem 4; 6 vai 8?". Ja tas tā ir, Rūķis atbild "jā", ja tā nav, tad Rūķis saka "nē".)

Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru Pūķis noteikti var noskaidrot Rūķa iedomāto skaitli? Kādi ir šie jautājumi?

2. kārtas uzdevumi

1. Vai vari pateikt kurš kociņš 1. zīm. ir jāpārvieta, lai iegūtu pareizu vienādību?

$$|V+XXV=XXX$$

1. zīm.

2. Četrstūra ABCD malu garumi ir $AB=1$ cm, $BC=2$ cm, $CD=3$ cm un $AD=4$ cm. Vai diagonāle AC var būt 5 cm gara?

3. Pūķis iedomājās vienu no skaitļiem 1; 2; 3; 4. Rūķis grib noskaidrot šo skaitli. Viņš var uzdot Pūķim jautājumu, vai iedomātais skaitlis ir kāds no nosauktajiem (un nosaukt tos), savukārt Pūķis var atbildēt tikai ar "jā" vai "nē". Turklāt **vienu** reizi Pūķis drīkst **melot!**

Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru Rūķis noteikti var noskaidrot Pūķa iedomāto skaitli? Kādi ir šie jautājumi?

4. Reiz Vinnijam Pūkam bija balta koka klucis ar izmēriem $4\text{ cm}\times 4\text{ cm}\times 4\text{ cm}$. Kādā lietainā dienā tas izkrita pa logu. Kad Pūks savu klucīti vēlāk atrada, tad izrādījās, ka tas no ārpuses ir kļuvis brūns. Vai vari pateikt kādās daļās Vinnijam Pūkam ir jāsavāgē klucīti, lai tās salīmējot kopā, Pūkam, tāpat kā senāk, būtu balts klucis ar izmēriem $4\text{ cm}\times 4\text{ cm}\times 4\text{ cm}$?

5. Pēteris atrada divciparu skaitli ar šādām īpašībām:

1) skaitļa pirmais cipars ir vairākas reizes lielāks par skaitļa otro ciparu;

2) aprēķinot šī skaitļa ciparu summu, starpību, reizinājumu un dalījumu iegūst četrus dažādus naturālus skaitļus, no kuriem neviens nav vienāds ar 1 un kuru reizinājums ir 972.

Vai vari pateikt, kādu skaitli ir atradis Pēteris?

3. kārtas uzdevumi

1. Cik šajā tūkstošgadē bija tādu gadskaitļu, kuru ciparu summa ir 20?

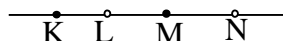
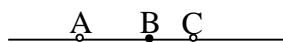
2. Pēcītis nolēma dzīvoklī grīdu noklāt ar vienādmalu trijstūra formas flīzītēm.

Pacenties atrast un parādīt vairākus veidus, kā to var izdarīt (t.i., kādā veidā jāsaliek kopā flīzes, lai starp tām nepaliek brīva vieta un tās nepārklājas; situāciju, kas veidojas pie sienas, neapskata).

3. Parādi, kā visracionālāk aprēķināt summu

$$\frac{1}{2000} + \frac{2}{2000} + \frac{3}{2000} + \dots + \frac{1998}{2000} + \frac{1999}{2000} !$$

4. Uz vienas taisnes atlikti divi balti punkti A un C un viens melns punkts B, uz šai taisnei paralēlas taisnes atlikti divi balti punkti L un N un divi melni punkti K un M (skat. 4. zīm.). Cik dažādus trijstūrus var izveidot, kuru virsotnes ir dotie punkti, un ne vairāk kā divas virsotnes ir vienā krāsā? (Trijstūrus uzskata par dažādiem, ja tiem atšķiras vismaz viena virsotne.)



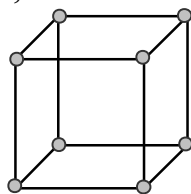
4. zīm.

5. Divi rūķīši Rūķelis un Rāķelis nopirka medus dzēriena podiņu un nolēma to kopīgi iztukšot, sagaidot Jauno gadu. Dzēriens maksāja 15 Ls, bet pirkšanas brīdī Rūķelis varēja iemaksāt tikai 6Ls, pārējo samaksāja Rāķelis. Sagaidot Jauno gadu, abiem draugiem piedroņās vēl trešais rūķītis - Rīķelis, un medus dzērienu viņi izdzēra trijātā. Pēc tam Rīķelis samaksāja abiem draugiem 5Ls - trešdaļu no kopējās summas. Cik Ls no šīs naudas pienākas Rūķelim un cik Rāķelim? Paskaidro savu spriedumu!

4. kārtas uzdevumi

1. Dota ciparu virknīte **123456789**. Nemainot ciparu kārtību, starp tiem ievietojiet aritmētisko darbību zīmes ("+", "-", ".", ":") un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu **1**. Ja nepieciešams, divus blakus stāvošus ciparus var uzskatīt arī par divciparu skaitli.

2. Ieraksti kuba virsotnēs skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, tā, lai katru četru ciparu, kas atrodas vienas kuba skaldnes virsotnēs, summas būtu vienādas! (skat. 2. zīm.)



2. zīm.

3. Dots taisnstūris 4×9 rūtiņas.

a) Sagriez to 3 taisnstūros tā, lai no tiem varētu salikt kvadrātu.

b) Ar vienu griezienu sagriez to divās daļās, no kurām var salikt kvadrātu.

4. Rūķītis nolēma izlīmēt savā istabā tapetes rakstainas tapetes (raksts atkārtojas ik pēc 30 cm). Palīdzi rūķītim aprēķināt, cik daudz tapešu rullī jānopērk, lai pietiktu visai istabai. Istabas garums ir 5 m, platums 3 m, augstums 2,5 m. Istabā ir 2,1 m plats un 1,9 m augsts logs un 0,9 m platas un 2 m augstas durvis, kur tapetes nav jālīmē. Tapešu rullis ir 50 cm plats un 10 m garš.

5. Ir zināms, ka burtu virknītes ABER, SEAB, ROAS ir aizšifrēti apzīmējumi burtu virknītēm JITA, LVTJ, TAIL, tikai nav zināms kura virknīte kurai atbilst. Atšifrējiet, kādi vārdi atbilst burtu virknītēm BESB un RBAOESB! (Šifrā katram burtam atbilst tieši viens burts; nekādi divi burti nav aizšifrēti ar vienu un to pašu burtu.)

5. kārtas uzdevumi

1. Kādi ir pēdējie četri cipari reizinājumam $1998 \cdot 1999 \cdot 2000 \cdot 2001 \cdot 2002$? Pamato savu atbildi!
2. Pelīte Pīka atrodas kvadrāta 6×6 rūtiņas augšējā kreisajā stūrī. Pa cik dažādiem ceļiem pelīte var nokļūt kvadrāta apakšējā labajā stūrī, ja Pīka drīkst iet tikai pa rūtiņu malām virzienos pa labi un uz leju, pie tam iešanas virzienu (no horizontāla uz vertikālu un otrādi) drīkst mainīt tieši 6 reizes?
3. Divus naturālus skaitļus sauksim par spoguļskaitļiem, ja viens skaitlis sastāv no tiem pašiem cipariem kā pirmais, tikai uzrakstītiem pretējā secībā (piem., spoguļskaitļu pāris ir skaitļi 1234 un 4321). Vai ir tāds divciparu spoguļskaitļu pāris, kurā viens skaitlis ir veselu skaitu reižu lielāks nekā otrs?
4. Valstī Flandija ir 6 pilsētas. Par maģistrāli sauksim ceļu, kas savieno kādas 2 šīs valsts pilsētas. Kāds ir mazākais maģistrāļu skaits, kas jāierīko Flandijā, lai no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru citu pilsētu, braucot pa ne vairāk kā divām maģistrālēm. (Ārpus pilsētām maģistrāles nekrustojas.) Parādi piemēru, kā to izdarīt!
5. Leipturijā dzīvo rūķi, kas runā tikai purpuļu valodā, rūķi, kas runā tikai murmuļu valodā, un rūķi, kas runā abās valodās. Zināms, ka 90% visu rūķu pārvalda purpuļu valodu, un $\frac{2}{5}$ visu rūķu runā murmuļu valodā. Kura daļa Leipturijas iedzīvotāju runā abās valodās?