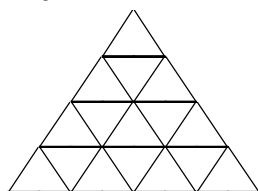


LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

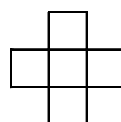
5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai var pa apli izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 12 katru tieši vienu reizi tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu starpība būtu vai nu 1, vai 2?
2. Andris pieraksta datumu kā naturālu skaitli, bez atstarpes rakstot vienu aiz otra dienas numuru mēnesī un mēneša numuru gadā. Piemēram, 2.jūliju viņš pieraksta kā 27, bet 18.septembri – kā 189.
Cik ir tādu naturālu skaitļu, kas ir vairāk nekā viena datuma pieraksti Andra sistēmā?
3. Kādu lielāko daudzumu trijstūrīšu var iekrāsot 1.zīm. redzamajā figūrā, lai nekādiem diviem iekrāsotiem trijstūrīšiem nebūtu ne kopīga mala, ne kopīgs stūris?



1.zīm.



2.zīm

4. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Vai to var sagriezt 5 gabalos, lai viens būtu tāds, kāds redzams 2.zīm, bet pārējie četri būtu savā starpā vienādi?
5. Astoņi rūķīši katrs uzzinājuši vienu jaunu ziņu (katrs citu). Katram mājās ir telefons, un viena saruna ilgst vienu stundu. Tās laikā abi runātāji pagūst viens otram izstāstīt visus jaunumus.
Kāds ir mazākais stundu skaits, kuru laikā visi rūķīši var uzzināt visus jaunumus?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Pieci rūķīši sanesa savā namiņā kastes ar dārgakmeņiem. Katru kasti nesa tieši divi rūķīši. Vai var gadīties, ka katrs rūķītis piedalījās tieši triju kastu nešanā? Vai tas varētu notikt, ja kastu nešanā piedalītos tieši četri rūķīši?

2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus a un b , ka

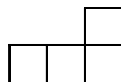
1) $a \cdot 17 - b \cdot 13 = 1$,

2) $a \cdot 39 - b \cdot 91 = 2$?

3. Tabula sastāv no 5×5 kvadrātiskām rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt pa naturālam skaitlim tā, lai vienlaicīgi

1) visu ierakstīto skaitļu summa būtu nepāra skaitlis,

2) katrā tādā figūrā, kāda attēlota 3.zīm. (tā var būt novietota arī citādi), ierakstīto skaitļu summa arī būtu nepāra skaitlis?



3.zīm.

4. Klases šaha turnīrā piedalās 10 dalībnieki; katrs spēlē ar katru vienu reizi. Par uzvaru piešķir 1 punktu, par neizšķirtu $\frac{1}{2}$ punkta, par zaudējumu 0 punktus. Nolemts, ka klases lielmeistara nosaukumu piešķirs tiem, kas izcīnīs vismaz 7 punktus. Kāds lielākais skolēnu skaits šajā turnīrā var iegūt lielmeistara nosaukumu?

5. Deviņi rūķīši katrs uzzinājuši vienu jaunu ziņu (katrs citu). Katram mājās ir telefons, un viena saruna ilgst vienu stundu. Tās laikā abi runātāji pagūst viens otram izstāstīt visus jaunumus.

Kāds ir mazākais stundu skaits, kuru laikā visi rūķīši var uzzināt visus jaunumus?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Rindā no sākuma bija uzrakstīti 2009 vieninieki. Ar vienu gājienu nodzēš divus pirmos rindā esošos skaitļus un tās otrā galā pieraksta abu nodzēsto skaitļu summu. Šādus gājienu atkārto, līdz rindā paliek tikai viens skaitlis.
 - a) cik gājienu tiks izdarīti?
 - b) atrast vienīgo palikušo skaitli.

2. Dots, ka $x^3 = y^4$ un $x^{11} = y^{15}$. Atrast x un y , ja tie ir pozitīvi skaitļi.

3. Cik ir tādu naturālu skaitļu x robežās no 1 līdz 2010 ieskaitot, ka $(x+1)(x+2)(x+3)$ dalās ar 343?

4. Kvadrātisks režģis sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Kādu lielāko daudzumu nogriežņu, kas kalpo par rūtiņu malām, var nokrāsot tā, lai nevienai no 16 rūtiņām nebūtu nokrāsotas visas malas?

5. Seši rūķīši katrs uzzinājuši vienu jaunu ziņu (katrs citu). Katram mājās ir telefons, un viena saruna ilgst vienu stundu. Tās laikā abi runātāji pagūst viens otram izstāstīt visus jaunumus.
Kāds ir mazākais stundu skaits, kuru laikā visi rūķīši var uzzināt visus jaunumus?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kuru no skaitļiem $102^2 \cdot 103^2 \cdot \dots \cdot 199^2$ un $(102^2 - 1)(103^2 - 1) \dots (199^2 - 1)$ sadalot pirmskaitļu reizinājumā, iegūst vairāk **dažādu** pirmskaitļu? Par cik vairāk?
(**Paskaidrojums:** $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ satur divus dažādus pirmskaitļus – 2 un 3.)

2. Trijstūrī ABC divas malas ir vienādas savā starpā, un $\angle ABC = 20^\circ$. Pierādiet, ka $3 \cdot AC > AB$.

3. Četrциparu skaitlim pārlīka ciparus citā kārtībā. Pierādīt: sākotnējā un iegūtā skaitļa starpība dalās ar 9.

4. Vai eksistē tādi skaitļi $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, ka vienādība $(x^2 + y^2 + 1) = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2)$ ir identitāte?

5. Katras divas no 6 lampām savienotas ar baltu vai sarkanu vītņi. Pierādīt: var atrast tādas 3 lampas, kuras visas savā starpā savienotas ar vienas krāsas vītņēm.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrodiet kaut vienu kvadrātvienādojumu ar veseliem koeficientiem, kam viena no saknēm ir

a) $\sqrt{2}+1$,

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

Piezīme. Katrā uzdevuma daļā runā par **citu** kvadrātvienādojumu.

2. Divas riņķa līnijas krustojas. To rādiusu garumi ir R un r , bet attālums starp to centriem ir d . Vienā no abu riņķa līniju krustpunktiem tām abām novilkta pieskares. Pierādīt: šīs pieskares ir perpendikulāras viena otrai tad un tikai tad, ja $R^2 + r^2 = d^2$.

3. Šaurleņķu trijstūra ABC iekšpusē dots punkts P . Pierādīt: P attālumu summa līdz ABC malām nav garāka par ABC lielāko augstumu.

4. Ap apaļu galdu sēž zēni un meitenes, zēnu ir trīs reizes vairāk nekā meiteņu. Tādu vietu, kur blakus sēž zēns un meitene, ir divreiz mazāk nekā pārējo vietu (t.i., tādu, kur blakus sēž vai nu zēns un zēns, vai meitene un meitene). Kāds ir mazākais iespējamais bērnu skaits?

5. Atrisīniet naturālos skaitļos vienādojumu sistēmu
$$\begin{cases} x^2 + y = z^2 \\ y^2 + x = t^2 \end{cases}.$$

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. a) dots, ka $x + y = n$. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 \geq \frac{n^2}{2}$.
b) dots, ka $x + y + z = n$. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{n^2}{3}$.
2. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, a^2 dalās ar b un b^2 dalās ar a . Pierādīt, ka $(a-b)^3$ dalās ar $a \cdot b$. Vai noteikti $(a-b)^2$ dalās ar $a \cdot b$?
3. Taisnleņķa trijstūrī ABC augstums no taisnā leņķa B virsotnes ir BD . Trijstūros ABD un BCD ievilkto riņķu centri ir O_1 un O_2 . Pierādīt, ka $\triangle ABC$ un $\triangle O_1DO_2$ ir līdzīgi savā starpā.
4. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^3 = y! + 2$.
5. Turnīrā piedalās 6 komandas. Katrai ar katru citu jāspēlē tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Katru dienu komandas sadalās trīs pāros, un katra pāra komandas spēlē savā starpā. (Tātad katru dienu katra komanda spēlē vienu spēli.) Kāds ir mazākais dienu skaits, pēc kura var rasties situācija: jau ir skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs vairāk uzvaru nekā jebkurai citai, un ir arī skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs mazāk uzvaru nekā jebkurai citai?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka p un q ir naturāli skaitļi un kvadrātvienādojuma $x^2 + px + q = 0$ saknes ir x_1 un x_2 . Pierādīt, ka

a) $x_1^2 + x_2^2$,

b) $x_1^8 + x_2^8$,

c) $x_1^5 + x_2^5$

ir vesels skaitlis.

2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{y} = 7$.

3. Dots, ka $a > b > c > d$. Pierādīt, ka $a - d + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-d} \geq 6$.

Kad pastāv vienādība?

4. Dots, ka ABCD ir izliekts četrstūris, kas nav paralelograms. Taisne, kas novilkta caur diagonāļu viduspunktiem, krusto malas AB un CD attiecīgi iekšējos punktos M un N. Pierādīt, ka trijstūru ABN un CDM laukumi ir vienādi savā starpā.

5. Turnīrā piedalās 8 komandas. Katrai ar katru citu jāspēlē tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Katru dienu komandas sadalās četros pāros, un katra pāra komandas spēlē savā starpā. (Tātad katru dienu katra komanda spēlē vienu spēli.) Kāds ir mazākais dienu skaits, pēc kura var rasties situācija: jau ir skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs vairāk uzvaru nekā jebkurai citai, un ir arī skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs mazāk uzvaru nekā jebkurai citai?

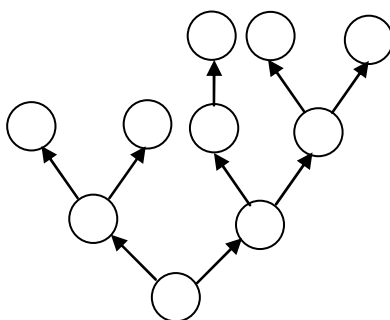
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka n – naturāls skaitlis, kas nedalās ar 5. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa skaitlim $(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 7$? Pie kādām n vērtībām tā tiek sasniegta?

2. Aplīšos 1.zīm jāizvieto pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 10 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai katra bultiņa ietu no mazāka skaitļa uz lielāku skaitli. Cik dažādu izvietojumu var izveidot?



1.zīm.

3. Atrisināt vienādojumu $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 2-x^2-y^2$.

4. Riņķī ievilkta sešstūra ABCDEF diagonāles AD, BE un CF krustojas vienā punktā. Pierādīt: sešstūra malas var sadalīt 2 grupās pa 3 malām katrā tā, ka abās grupās iekļauto malu garumu reizinājumi ir vienādi savā starpā.

5. Regulārā 20-stūrī katrā virsotnē ir pa vienai monētai. Ar vienu gājienu var izvēlēties 2 monētas un tās pārbīdīt: vienu uz blakus virsotni pulksteņa rādītāja kustības virzienā, otru uz blakus virsotni pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam. Vai, atkārtojot šādus gājienu, var savākt visas monētas

- a) 4 kaudzēs pa 5 monētām katrā,
- b) 5 kaudzēs pa 4 monētām katrā?