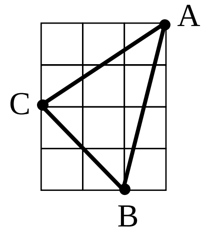
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai skaitli 119 var izteikt kā vairāku naturālu skaitļu summu tā, lai arī šo skaitļu reizinājums būtu 119?

2. Cik rūtiņas liels ir trijstūra ABC laukums?



3. Četrdesmitvietīgs autobuss veica reisu no pilsētas A uz pilsētu G, pa ceļam pieturot pilsētās B, C, D, E un F (iespējams, citā secībā). Katrā pilsētā iekāpušo un/vai izkāpušo pasažieru skaits parādīts tabulā:

Pilsēta	Izkāpa	Iekāpa
A	-	34
B	23	30
C	28	29
D	21	32
E	26	14
F	35	22
G	28	-

Noteikt, kādā secībā tika apmeklētas pilsētas B, C, D, E un F, ja zināms, ka nevienā brīdī autobusā netika pārvadāts vairāk pasažieru kā autobusā ir vietu!

4. Vai ir iespējams 5×5 rūtiņu kvadrātā izkrāsot dažas rūtiņas tā, ka katrā 3×3 rūtiņu kvadrātā, kas ir lielā kvadrāta daļa, ir iekrāsotas tieši **a)** trīs, **b)** četras rūtiņas?

5. Astoņas raganas katra ir iemācījusies jaunu burvestību (katra citu). Katrai raganai ir mobilais telefons. Kad viena ragana piezvana otrai, tās vienas minūtes laikā paspēj viena otrai iemācīt visas burvestības, ko māk pašas. Kāds ir mazākais iespējamais laiks, pēc kura visas raganas būs iemācījušās visas jaunās burvestības?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

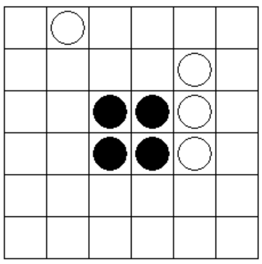
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 21 var sadalīt grupās tā, ka katrā grupā lielākais skaitlis ir vienāds ar pārējo skaitļu summu?

2. Visi piecciparu naturālie skaitļi, kuru pierakstā katrs no cipariem 1, 2, 3, 4, 5 izmantots tieši vienu reizi, ir uzrakstīti virknē augošā secībā: 12345, 12354, 12435, ... Kurš pēc kārtas šajā virknē ir skaitlis 45321?

3. Vai var atrast tādus veselus skaitļus x un y, ka
a) $12x - 8y = 2$;
b) $11x - 7y = 2$?

4. Sagriez zīmējumā redzamo figūru pa rūtiņu malām četrās gan pēc formas, gan pēc laukuma vienādās daļās tā, lai katrā no tām būtu pa vienam melnam un pa vienam baltam aplītim.



5. 6×6 rūtiņas lielā kvadrātā izkrāso sešas rūtiņas tā, lai no tā nevarētu izgriezt ne taisnstūri 1×6 rūtiņas, ne kvadrātu 3×3 rūtiņas, kam visas rūtiņas ir neizkrāsotas.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrodiet skaitļa $1^2+2^2+\cdots+99^2$ pēdējo ciparu.

2. Cik ir tādu naturāli skaitļu n no 1 līdz 2011 ieskaitot, ka skaitlis $(n+1)(n+2)(n+3)$ dalās ar 125?

3. Pa apli uzrakstīti pieci dažādi skaitļi, nekādu divu blakus uzrakstīto skaitļu reizinājums nav pozitīvs. Aplūkojam visus piecus triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu reizinājumus. Cik no tiem ir pozitīvi?

4. Vai 8×8 rūtiņas lielā kvadrātā var aizkrāsot **a)** 16 rūtiņas, **b)** 17 rūtiņas tā, ka nekādas divas aizkrāsotās rūtiņas neatrodas blakus? (Par blakus rūtiņām sauksim rūtiņas, kurām ir kopīgs vismaz viens punkts).

5. Pilsētā, kurā dzīvo godīgie iedzīvotāji (kas vienmēr runā tikai taisnību) un blēži (kas vienmēr melo), notika domes vēlēšanas, kurās piedalījās visi pilsētas iedzīvotāji. Balsot varēja par kādu no četrām partijām A, B, C un D, un katrs iedzīvotājs nobalsoja tieši par vienu partiju. Pirms rezultātu apkopošanas žurnālisti veica visu iedzīvotāju aptauju. Uz jautājumu „Vai jūs balsojāt par partiju A?” ar „Jā” atbildēja 22% pilsētas iedzīvotāju. Uz līdzīgu jautājumu par partiju „B” ar „Jā” atbildēja 33%, par partiju „C” – 44%, bet par partiju „D” – 55% iedzīvotāju. Cik procenti pilsētas iedzīvotāju ir godīgie iedzīvotāji un cik – blēži?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

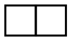
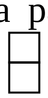
8. klase

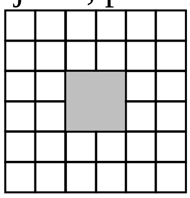
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Piecciparu skaitlis B ir iegūts no mazāka piecciparu skaitļa A, samainot vietām tā ciparus. Pierādīt, ka $B-A$ dalās ar 9.

2. Zināms, ka skaitlis 1 ir vienādojuma $x^2+px+q=0$ sakne. Ar ko ir vienāda summa $p+q$?

3. Trijstūrī ABC ∠ABC=30°. Uz malas AB izvēlēts punkts E, bet uz malas BC punkts F, tā, ka trijstūris CEF ir vienādmalu. Pierādīt, ka punkts F ir malas BC viduspunkts.

4. Apskatām zīmējumā parādīto figūru, kas sastāv no 32 rūtiņām. Kāds ir lielākais dažādu taisnstūru skaits, kuros to var sagriezt (griezumus jāveic tikai pa rūtiņu malām)? Atbildi pamato! (Divus taisnstūrus uzskata par atšķirīgiem, ja tiem atšķiras izmēri nevis tikai novietojums, piem.,  un  ir vienādi taisnstūri.)



5. Pilsētā, kurā dzīvo godīgie iedzīvotāji (kas vienmēr runā tikai taisnību) un blēži (kas vienmēr melo), notika domes vēlēšanas, kurās piedalījās visi pilsētas iedzīvotāji. Balsot varēja par kādu no četrām partijām A, B, C un D, un katrs iedzīvotājs nobalsoja tieši par vienu partiju. Pirms rezultātu apkopošanas žurnālisti veica visu iedzīvotāju aptauju. Uz jautājumu „Vai jūs balsojāt par partiju A?” ar „Jā” atbildēja 33% pilsētas iedzīvotāju. Uz līdzīgu jautājumu par partiju „B” ar „Jā” atbildēja 44%, par partiju „C” – 55%, bet par partiju „D” – 0% iedzīvotāju. Kāds patiesībā bija balsu sadalījums, t.i., cik procenti iedzīvotāju nobalsoja par katru partiju?

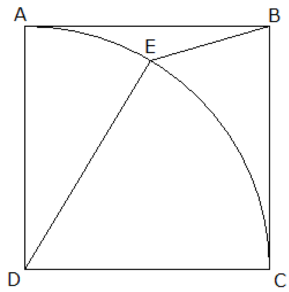
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Apskatām funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur a un b – reāli skaitļi, pie tam $a + b = 2011$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

2. Kvadrātā ABCD ir ievilkts riņķa līnijas loks AC (riņķa līnijas centrs ir D, bet rādiuss DA; skat. zīm.). Uz loka AC atzīmēts tāds punkts E, ka ∠ADE=2∠ABE. Aprēķināt ∠ABE lielumu.



3. Aplī uzrakstīti k dažādi naturāli skaitļi. Starp tiem pāra skaitļu ir trīs reizes vairāk nekā nepāra skaitļu. Tādu vietu, kur blakus esošo skaitļu summa dalās ar 2, ir divreiz vairāk nekā tādu vietu, kur blakus esošo skaitļu summa nedalās ar 2. Kāda ir mazākā iespējamā k vērtība?

4. Pierādīt, ka nav tādu naturālu skaitļu a, x, y un z, ka $7^a = 7^x + 7^y + 7^z$.

5. Sacensībās piedalījās deviņas kamaniņbraucējas. Sacensību uzvarētāju nosaka pēc četru braucienu laiku kopsummas – kam šī summa mazāka, tā ieņem augstāku vietu. Atsevišķu sportistu braucienu laiki atsevišķos braucienos un šo laiku kopsumma visām sportistēm bija atšķirīga. Kamaniņbraucēja Maija visos braucienos ieņēma vienu un to pašu – N-to vietu. Kādai lielākajai N vērtībai iespējams, ka Maija kopvērtējumā tomēr uzvarēs, t.i., iegūs 1. vietu?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. a) Dots, ka $s+t=p$. Pierādīt, ka $2s^2 \geq p^2 - 2t^2$.

b) Dots, ka $s+t+u=p$. Pierādīt, ka $3s^2 \geq p^2 - 3t^2 - 3u^2$.

2. Trijstūrī ABC novilkts augstums AD. Zināms, ka $\mathrm{AC} > \mathrm{AB}$. Pierādīt, ka $\mathrm{DC} - \mathrm{DB} > \mathrm{AC} - \mathrm{AB}$.

3. Ar $[a]$ apzīmējam lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *a*. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu $x \cdot [x \cdot [x]] = 41$.

4. Trijstūris ABC ir vienādsānu (AB=BC) un ∠ABC=30°. Uz malas AB izvēlēts punkts E, bet uz malas BC – punkts F, tā, ka trijstūris CEF ir vienādmalu.
Aprēķināt trijstūru CEF un ABC laukumu attiecību!

5. Bobslejista Jāņa komanda piedalījās sacensībās, kurās uzvarētāju nosaka pēc četru braucienu laiku kopsummas – kam šī summa mazāka, tas ieņem augstāku vietu. Jāņa komanda pirmajā braucienā ieņēma 2., otrajā braucienā – 3., trešajā – 4., bet ceturtajā braucienā – 10. vietu. Pavisam sacensībās piedalījās 18 komandas. Atsevišķu komandu braucienu laiki atsevišķos braucienos un šo laiku kopsumma visām komandām bija atšķirīga. Kādu augstāko un kādu zemāko vietu kopvērtējumā varēja iegūt Jāņa komanda?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Pierādīt, ka visiem reāliem *x*, *y*
$$x^2+y^2+4\geq 2x+2y+xy\,.$$

2. Uz izliekta četrstūra ABCD malas BC atzīmēts iekšējs punkts E, bet uz pretējās malas AD – iekšējs punkts F. Zināms, ka nogrieznis EF krusto četrstūra ABCD diagonāles to viduspunktos. Pierādīt, ka trijstūru ADE un BCF laukumi ir savā starpā vienādi!

3. Atrisināt vienādojumu sistēmu reālos skaitļos:
$$\begin{cases} x+xy+y=17 \\ y+yz+z=71 \\ z+zx+x=11 \end{cases}$$

4. Zināms, ka a un b ir naturāli skaitļi, pie tam a^b+1 dalās ar 21. Kāda ir mazākā iespējamā summas $a+b$ vērtība?

5. Aplī uzrakstīti n veseli skaitļi, kuru summa ir 10, pie tam katrs skaitlis ir vienāds ar tam pulksteņrādītāja virzienā sekojošo divu skaitļu starpības moduli. Atrast visas iespējamās n vērtības!

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu

$$\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-a^2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-b^2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

2. Trijstūrī ABC caur patvaļīgu malas BC iekšējo punktu P tiek vilktas taisnes $u \parallel AC$ un $v \parallel AB$, kuras krusto malas AB un AC attiecīgi punktos M un N. Pierādīt, ka trijstūra ABC laukums ir vienāds ar trijstūru MBC un NBC laukumu summu.

3. Naturālu skaitli sauksim par *fantastisku*, ja tas ir vienāds ar sava kvadrāta ciparu reizinājumu. Piemēram, 1 ir *fantastisks* (jo $1^2=1$ un $1=1$), bet 4 – nē (jo $4^2=16$, bet $1\cdot 6 = 6 \neq 4$). Pierādīt, ka visi nepāra skaitļi, kas lielāki par 1, nav *fantastiski*.

4. Taisnstūrveida rūtiņu tabula sastāv no n rindām un 2011 kolonnām. Tās rūtiņās ierakstīts pa naturālam skaitlim tā, ka katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir mazāks vai vienāds ar tieši vienā tās kaimiņu rūtiņā ierakstīto skaitli. Kādai lielākajai n vērtībai tas ir iespējams? (Divas rūtiņas sauksim par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

5. Pierādīt, ka neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.