

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

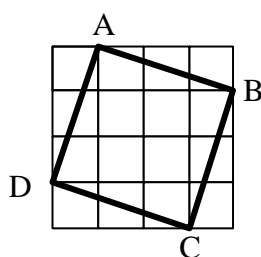
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Ar naturālu skaitli var veikt divu veidu darbības:

- 1) reizināt ar 3,
- 2) nodzēst pēdējo ciparu.

Parādīt, kā no skaitļa 5 var iegūt skaitli 21, vairakkārt pielietojot tikai šīs darbības.

2. Cik rūtiņas liels ir kvadrāta ABCD laukums (skat. 1. zīm.)?



1. zīm.

3. Izveidot septiņciparu skaitli, kas dalās ar 7 un kura pierakstā katrs no cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 izmantots tieši vienu reizi.

4. Maijai dārzā ir kvadrātveida puķu dobe, kura sastāv no 10×10 vienādiem kvadrātveida lauciņiem. Viņa ir iegādājusies dzeltenu, sarkanu un baltu tulpju sīpoliņus. Maija vēlas katrā lauciņā iestādīt tieši vienu tulpi.

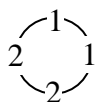
a) Vai Maija var trīs krāsu tulpes iestādīt tā, lai katrā rindā būtu nepāra skaits katras krāsas ziedu?

b) Vai Maija var tulpes iestādīt tā, lai lauciņos, kam ir kopīga mala, uzziēdētu atšķirīgas krāsas tulpes un lai katrā rindā jebkuras trīs pēc kārtas ņemtas tulpes, būtu atšķirīgās krāsās?

5. a) Pa apli izvietot ciparus 1 un 2 (pavisam astoņus ciparus) tā, lai, lasot pa trīs cipariem pēc kārtas pulksteņrādītāja virzienā, būtu sastopami **visi** trīsciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 un/vai 2.

b) Vai pa apli var izvietot 16 ciparus 1 un 2 tā, lai, lasot pa četriem cipariem pēc kārtas pulksteņrādītāja virzienā, būtu sastopami **visi** četruciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 un/vai 2?

(Piemēram, 2. zīm. parādīts, ka četrus ciparus var izvietot tā, lai būtu sastopami visi divciparu skaitļi, kuru pierakstā ir tikai cipari 1 un/vai 2: 11, 12, 22, 21.)



2. zīm.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

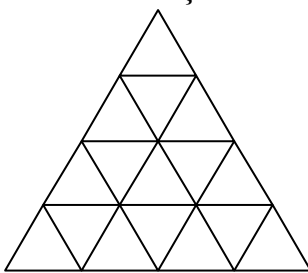
1. Atrast divus vienu otram sekojošus naturālus skaitļus, kuriem abiem ciparu summa dalās ar 5.
2. Visi piecciparu naturālie skaitļi, kuru pierakstā katrs no cipariem 1, 2, 3, 4, 5 izmantots tieši vienu reizi, ir uzrakstīti virknē augošā secībā: 12345, 12354, 12435, Kurš pēc kārtas šajā virknē ir skaitlis 53421?
3. Vai plaknē var uzzīmēt
 - a) sešstūri,
 - b) septiņstūriun riņķa līniju, kas krusto uzzīmētā daudzstūra katru malu tieši vienā punktā? (Riņķa līnija nepieskaras daudzstūra malām un neiet caur tā virsotnēm.)
4. Vai piecstūra virsotnēs var ierakstīt piecus dažādus naturālus skaitļus, lai jebkuru divu blakus stāvošu skaitļu summa būtu pirmskaitlis?
5. Katrs no trīs rūķīšiem ir iedomājies vienu no skaitļiem 1, 2 vai 3, katrs – citu skaitli. Katrs rūķītis zina, kādus skaitļus ir iedomājušies pārējie rūķīši. Kā var noskaidrot, kuru skaitli katrs rūķītis ir iedomājies, ja katram rūķītim var uzdot tieši vienu jautājumu, uz kuru viņš var atbildēt tikai ar “jā” vai “nē”? Katram rūķītim drīkst jautāt arī par citu rūķīšu iedomātajiem skaitļiem.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Ar naturālu skaitli var veikt divu veidu operācijas:
 - 1) reizināt ar 7,
 - 2) nodzēst skaitļa lielāko (vienu no lielākajiem, ja tādi ir vairāki) ciparu.Vai ar šādām operācijām no skaitļa 9 var iegūt skaitli 27, atkārtojot tās vairākas reizes jebkādā secībā?
2. Uzzīmēt slēgtu lauztu līniju ar 7 posmiem, kura sadala plakni daudzstūros, starp kuriem ir astoņstūris.
3. Pa apli uzrakstīti septiņi dažādi skaitļi, nekādu divu blakus uzrakstīto skaitļu reizinājums nav pozitīvs. Aplūkojam visus triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu reizinājumus. Cik no šiem septiņiem reizinājumiem ir pozitīvi?
4. Pierādīt, ka 1004041 nav pirmskaitlis.
5. Vienādmalu trijstūris ar malas garumu 4 sadalīts 16 vienādos trijstūros (skat. 3. zīm.).
Katrā mazajā trijstūrī ir ierakstīts viens skaitlis, pavisam ierakstīti septiņi trijnieki un deviņi piecinieki.
Pierādīt, ka var izvēlēties četrus trijstūrus, kas veido vienādmalu trijstūri ar malas garumu 2 un kuros ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 18.



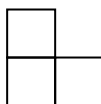
3. zīm.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Skaitli 3999991 uzrakstīt kā divu veselu skaitļu reizinājumu tā, lai katrs no reizinātājiem ir lielāks nekā 1.
2. Trijstūrī ABC leņķis ABC ir 30° liels. Uz malas AB izvēlēts punkts E, bet uz malas BC punkts F tā, ka trijstūris CEF ir vienādmalu. Pierādīt, ka punkts F ir malas BC viduspunkts.
3. Vai naturāla skaitļa ciparu reizinājums var būt skaitlis \overline{aabbcc} ? (Pieraksts \overline{kmn} nozīmē, ka skaitlī ir k simti, m desmiti un n vieni.)
4. Uzzīmēt plaknē sešus punktus tā, lai no katra uzzīmētā punkta tieši trīs citi uzzīmētie punkti atrastos tieši 1 cm attālumā.
5. Uzzīmēt figūru, kuru var sadalīt vienādos „stūrīšos” (skat. 4. zīm.) tieši divos dažādos veidos. „Stūrīši” var būt pagriezti arī citādāk. (Divi sadalījumi, kas iegūstami viens no otra pagriezienu rezultātā vai ir viens otra spoguļattēls, uzskatāmi par vienādiem.)



4. zīm.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Apskatām visas funkcijas $y = ax^2 - 2x + b$, kur a un b – reāli skaitļi un $a + b = 2012$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

2. Regulāra trijstūra iekšpusē patvaļīgi izvēlēts punkts P . Pierādīt, ka attālumu summa no punkta P līdz trijstūra malām nav atkarīga no punkta P izvēles.

3. Kādām n vērtībām n cilvēkus var sadalīt grupās (varbūt tikai vienā) tā, lai katrā grupā būtu tieši 5, 6 vai 7 cilvēki?

4. Dota skaitļu virkne 1, 1, 2, 5, 9, 6, Tā tiek veidota pēc likuma: virknes pirmie divi locekļi ir 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu kvadrātu summas pēdējo ciparu.
 - a) Noteikt, vai šīs virknes 2012. loceklis ir pāra vai nepāra skaitlis.
 - b) Aprēķināt virknes 2012. locekli.

5. Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$. Aplūkojam visus naturālos skaitļus no 1 līdz $n - 1$ ieskaitot, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar skaitli n . Pierādīt, ka šo skaitļu summa dalās ar n .

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. a) Dots, ka $a + b = c$. Pierādīt, ka $2a^2 \geq c^2 - 2b^2$.
b) Dots, ka $a + b + c = d$. Pierādīt, ka $3a^2 \geq d^2 - 3b^2 - 3c^2$.

2. Uz trijstūra ABC malas AC izvēlēts punkts K . Nogrieznis BK sadala trijstūri ABC divos trijstūros. Visi trīs trijstūri ($\triangle ABC$ un abi dalījuma iegūtie trijstūri) ir līdzīgi. Pierādīt, ka $\triangle ABC$ ir taisnleņķa trijstūris.

3. Doti seši pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Pierādīt, ka var atrast tādu pirmskaitli p , ka **tieši viens** no dotajiem skaitļiem dalās ar p .

4. Ir aprēķinātas skaitļu 2^{2012} un 5^{2012} vērtības un iegūtie skaitļi uzrakstīti viens aiz otra. Cik cipari uzrakstīti?

5. Dota tabula ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas, katrā tās rūtiņā ierakstīts vesels skaitlis. Tabulas rindas un kolonnas pēc kārtas sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz n , sākot no augšējās rindas un kreisās kolonnas (skat. 1. zīm.). Zināms, ka visiem i izpildās sakarība: i -tajā rindā ierakstīto skaitļu summa ir vienāda ar i -tajā kolonnā ierakstīto skaitļu summu.
Atrast visus tādus n , kuriem visām šādām tabulām izpildās sekojoša īpašība: i -tās rindas j -tajā kolonnā ierakstītais skaitlis ir vienāds ar i -tās kolonnas j -tajā rindā ierakstīto skaitli (t.i., tabula ir simetriska attiecībā pret galveno diagonāli, skat. 1. zīm. iekrāsoto diagonāli).

	1	2	...	n
1				
2				
...			...	
n				

1. zīm.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis m , kura ciparu reizinājums ir vienāds ar simetrisku 8-ciparu skaitli?
(Par *simetrisku* sauc skaitli, kas vienādi lasāms no abiem galiem.)

2. Atrisināt vienādojumu sistēmu reālos skaitļos:

$$\begin{cases} 2x + xy + 2y = 8 \\ 2y + yz + 2z = 20 \\ 2z + zx + 2x = 14 \end{cases}$$

3. Vienā riņķa līnijā ievilks regulārs deviņstūris un regulārs trijstūris. Kas ir lielāks: dotā deviņstūra malu kvadrātu summa vai dotā trijstūra malu kvadrātu summa?

4. Atrast augošu aritmētisku progresiju, kuras visi elementi ir naturāli skaitļi un kurai piemīt īpašība: neviens tās elements **nav** naturāla skaitļa k -tā pakāpe jebkuram naturālam $k \geq 2$.

5. Dotas sešas vienāda izskata monētas un sviras svāri bez atsvariem. Četras no monētām sver 8 gramus katra, pārējās divas sver 7 gramus katra. Kā ar divām svēršanām atrast **vismaz** vienu monētu, kas sver 7 gramus?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Skaitlis a ir vienādojuma $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ sakne. Pierādīt, ka $a > -\frac{1}{2}$.

2. Pierādīt, ka neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.

3. Nogrieznis BP ir trijstūra ABC bisektrise, punkti N un M ir attiecīgi malu AB un AC tādi iekšēji punkti, ka $AN = PC$ un $AM = BC$. Taisnes BP un MN krustojas punktā X . Pierādīt, ka $\triangle NBX \sim \triangle PBC$.

4. Kādiem pirmskaitļiem p skaitlim $p^2 + 23$ ir tieši četri naturāli dalītāji?

5. Regulārā 17-stūrī $A_1A_2\dots A_{17}$ atzīmētas četras virsotnes A_i, A_j, A_k, A_l ($i < j < k < l$). No pārējām virsotnēm ir jāizvēlas četras virsotnes (apzīmēsim tās ar B, C, D un E) tā, lai B būtu starp A_i un A_j , C būtu starp A_j un A_k , D būtu starp A_k un A_l , E būtu starp A_l un A_i . Kādām i, j, k, l vērtībām punktu četrinieku (B, C, D, E) var izvēlēties visvairāk veidos?