Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 25. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

25.21. Apgalvojums seko no identitātes

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\cdot\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz\right).$$

25.22. Ievērojot, ka $\sqrt{a^2} = |a|$, vienādojums pārveidojas formā

$$|x+3| - 2\cdot|x-1| = 3.$$

Risinot to ar intervālu metodi, iegūstam atrisinājumus $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

25.23. Ja Ilzei ir *x* gadu, bet Dacei *y* gadu, tad pirms $x-y$ gadiem Ilzei bija *y*, bet Dacei $2y-x$ gadi; tātad

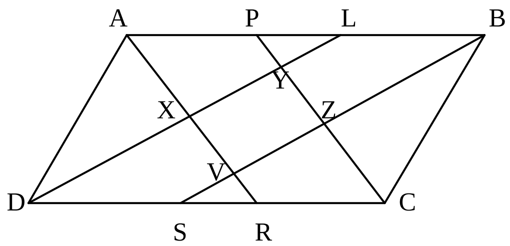
$$x = 2\cdot(2y-x).$$

Pēc $x-y$ gadiem Ilzei būs $2x-y$, bet Dacei *x* gadi; tātad

$$2x - y + x = 63.$$

No šiem diviem vienādojumiem iegūstam $x = 28$, $y = 21$.

25.24. Skat. 25.3. zīm.



25.3. zīm.

$$\angle YXV = \angle AXD = 180° - (\angle XAD + XDA) =$$

$$180° - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ADC) = 180° - \frac{1}{2}\cdot 90° = 90°.$$

Līdzīgi pierāda, ka arī pārējie četrstūra *XYZV* leņķi ir taisni; tātad aplūkojamais četrstūris ir taisnstūris.

Tā kā *AX* ir trijstūra *DAL* bisektrise un augstums, tad *DAL* ir vienādsānu trijstūris un $\Delta DAX = \Delta LAX$.

Līdzīgi pierāda, ka $\Delta BZC = \Delta BZP$ un $\Delta BZC = \Delta SZC$.

No simetrijas seko, ka $\Delta LAX = \Delta SZC$.

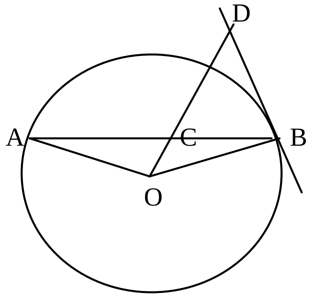
Apvienojot šīs vienādības, iegūstam

$$\Delta LAX = \Delta BZP.$$

Tātad šo trijstūru augstumi ir vienādi, un $XZ \parallel LB$. Tā kā arī $LX \parallel BZ$, tad četrstūris $LXZB$ ir paralelograms. Tas nozīmē, ka

$$XZ = LB = AB - AL = AB - AD = a - b.$$

25.25. Skat. 25.4. zīm.



26.4. zīm.

Tā kā BD ir pieskare, tad OBD ir taisnleņķa trijstūris. Tāpēc

$$\angle DBC = 90° - \angle ABO = 90° - OAC = \angle ACO = \angle BCD.$$

No šejienes seko, ka CDB ir vienādsānu trijstūris.

25.26. Ievedīsim jaunu mainīgo $t = x + \frac{2}{x}$. Tad $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 - 4$, un iegūstam vienādojumu

$$t^2 + 6t - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3, t_2 = -9.$$

Atbilde: $x \in \left\{1, 2, \frac{-9 \pm \sqrt{73}}{2}\right\}$.

25.27. Risinot nevienādību ar intervālu metodi, iegūstam atbildi

$$x \in (2, 5).$$

25.28. Ja motorlaivas ātrums ir v, attālums pa upi vienā virzienā – s, pirmās upes ātrums – x, bet otrās – y, tad pirmā motorlaiva brauc

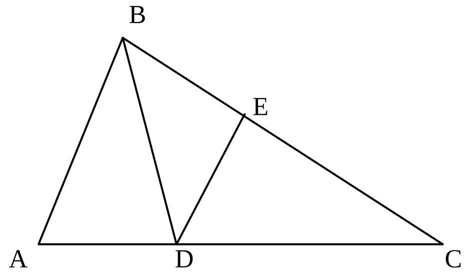
$$\frac{s}{v-x} + \frac{s}{v+x} = \frac{2vs}{v^2 - x^2} \text{ stundas,}$$

bet otrā motorlaiva $\frac{2vs}{v^2 - y^2}$ stundas.

Ja $x > y$, tad $v^2 - x^2 < v^2 - y^2$ un $\frac{2vs}{v^2 - x^2} > \frac{2vs}{v^2 - y^2}$.

Tātad ceļu īsākā laikā veica motorlaiva upē ar mazāku straumes ātrumu.

25.29. Skat. 25.5. zīm.



25.5. zīm.

Pieņemam, ka trijstūrī ABC mala $AB = 10$ un mala $BC = 15$; BD ir bisektrise. Novelkam $DE \parallel AB$. Tad $\angle BDE = \angle DAB = \angle DBE$; tātad DEB ir vienādsānu trijstūris.

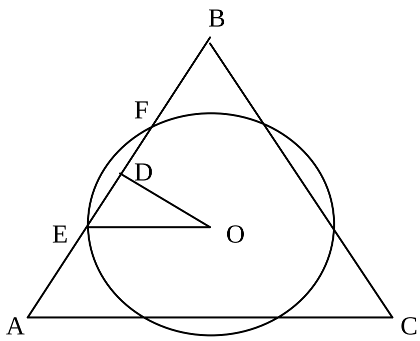
No trijstūra bisektrises īpašības seko vienādība $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$.

No Talesa teorēmas $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$. Apzīmēsim $BE = x$, tad $EC = 15 - x$ un

$$\frac{x}{15 - x} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

Tātad $BD < BE + EB = 6 + 6 = 12$.

25.30. Skat. 25.6. zīm.



25.6. zīm.

Novelkam perpendikulu OD pret trijstūra malu AB. Tad

$$OD = \frac{1}{3} \cdot DC = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

No dotā $OE = \frac{1}{3}$; tātad $DE = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a}{6}$ un $FE = \frac{a}{3}$.

No šejienes redzams, ka riņķa līnija trijstūra malu sadala 3 vienādās daļās un arī riņķa līnijas loki ir vienādi.

Trijstūra un riņķa kopīgā daļa sastāv no 3 regulāriem trijstūriem ar malu $\frac{a}{3}$ un 3 sektoriem, ar centra leņķi $\frac{\pi}{3}$ (kopā tie veido pusriņķi ar rādiusu $\frac{a}{3}$). Kopīgais laukums ir $\frac{a^2\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)}{36}$.

25.31. Dotās sistēmas

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}=78. \end{cases}$$

pirmo vienādojumu pareizinām ar $\left(\sqrt{xy}\right)^2$ un atņemam otro vienādojumu; iegūstam

$$xy+7\sqrt{xy}-78=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{xy}=6.$$

Izdalot otro vienādojumu ar $\sqrt{xy}$, iegūstam

$$|x|+|y|=13.$$

No šejienes ar ievietošanas metodi (un ievērojot, ka skaitļu x un y zīmes ir vienādas) iegūstam atrisinājumus: $\{(-9,-4),(-4,-9),(4,9),(9,4)\}$.

25.32. Izpildot pārveidojumus, iegūstam

$$\sin 10°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°=\frac{1}{2}\left(\cos 40°-\cos 60°\right)\sin 70°=$$

$$\frac{1.}{2}\cos 40°\sin 70°-\frac{1}{4}\sin 70°=\frac{1}{4}\left(\sin 30°+\sin 110°-\sin 70°\right)=$$

$$\frac{1}{4}\cdot\sin 30°=\frac{1}{8}.$$

25.33. Dotās progresijas pirmo locekli apzīmējam ar a, bet tās kvocientu ar q. Iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a\cdot\left(1+q+q^2\right)=3{,}5 \\ a^2\cdot\left(1+q^2+q^4\right)=5{,}25. \end{cases}$$

Pirmo vienādojumu kāpinām kvadrātā un atņemam no tā otro; iegūstam

$$2a^2q\left(1+q+q^2\right)=7.$$

Izdalot šo vienādību ar pirmo vienādojumu, iegūstam

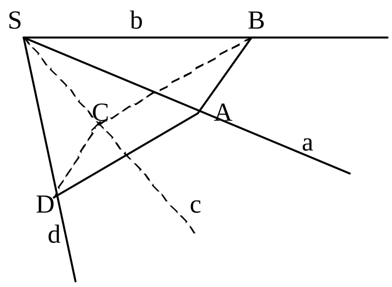
$$2aq=2.$$

Ievietojot $a=\frac{1}{q}$ pirmajā vienādojumā, iegūstam

$$1+q+q^2=3{,}5\cdot q \quad \Rightarrow \quad q\in\left\{\frac{1}{2},\,2\right\}.$$

Atbilde: $a_1 = 2,\ q_1 = \frac{1}{2};\quad a_2 = \frac{1}{2},\ q_2 = 2.$

25.34. Skat. 25.7. zīm.



25.7. zīm.

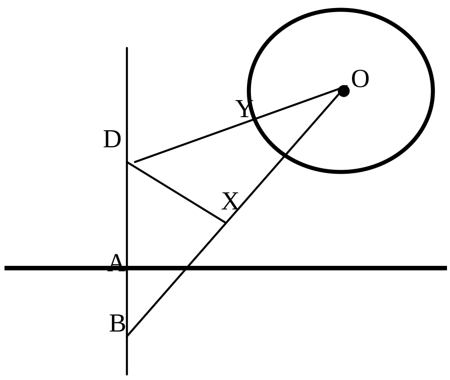
Četrplakņu kakta virsotni apzīmēsim ar S un kakta šķautnes ar a, b, c, d.

Plakņu Sab un Scd šķēluma taisni apzīmēsim ar l, bet plakņu Sad un Scd šķēluma taisni ar t.

Caur patvaļīgu taisnes a punktu A vilksim plakni, kas paralēla taisnēm l un t. Tās krustpunkti ar pārējiem četrplakņu kakta stariem apzīmēti ar B, C un D.

Tad $AB \parallel l \parallel CD$ un $AD \parallel t \parallel BC$. Tātad $ABCD$ ir paralelograms.

25.35. Skat. 25.8. zīm.



25.8. zīm.

Caur doto taisnes punktu A velkam perpendikulāru taisni un uz tās atzīmējam punktu B, lai AB būtu vienāds ar dotā riņķa rādiusu. Tālāk savienojam B ar O un velkam nogriežņa BO vidusperpendikulu XD. Punkts D būs meklējamās riņķa līnijas centrs. Tiešām, no konstrukcijas gaitas seko, ka BDO ir vienādsānu trijstūris; tātad

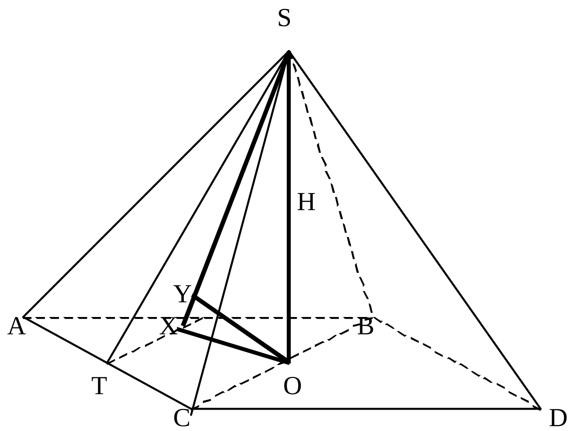
$$DA = DB - AB = DO - r = DY .$$

Tas nozīmē, ka riņķa līnija, kuras centrs ir punkts D un rādiuss DA pieskaras gan dotajai taisnei punktā A gan dotajai riņķa līnijai.

25.36. Apzīmējam meklējamā skaitļa x ciparu summu ar $S(x)$. Tā kā $5^4 = 625$ un $10^4 = 10000$, bet x ir četrciparu skaitlis, tad $6 \le S(x) \le 9$. Pārbaudot skaitļus $6^4, 7^4, 8^4, 9^4$ redzam, ka der tikai skaitlis $7^4 = 2401 = (2+4+0+1)^7$.

25.37. Trijstūra mediānu krustpunkta attālums līdz trijstūra malai ir vienāds ar $\frac{1}{3}$ no atbilstošā augstuma; tātad jāpierāda, ka pret garāku trijstūra malu atrodas īsāks augstums. Tiešām, ja $a > b$, tad $h_a = \frac{2S}{a} < \frac{2S}{b} = h_b$.

25.38. Skat. 25.9. zīm.



25.9. zīm.

Attālumu starp apotēmu ST un pamata diagonāli CB meklē kā augstumu OY trijstūrī SOX. Tā kā OX ir puse no trijstūra ABC augstuma, tad

$$OX = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} \text{ un}$$

$$OY = \frac{OX \cdot H}{\sqrt{OX^2 + H^2}} = \frac{Hab}{\sqrt{a^2b^2 + 4H^2(a^2+b^2)}}.$$

Redzam, ka attālums nav atkarīgs no apotēmas un diagonāles izvēles.

25.39. Dotā izteiksme S pārveidojas formā

$$(\sin x + \cos x) \cdot (1 + 4\sin 2x).$$

Tā kā $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$, tad

$$S = \pm\sqrt{1+\sin 2x} \cdot (1 + 4\sin 2x) = \pm 3\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

25.40. Izpildot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$\frac{x^3+2x}{x-4} > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^3+3x-4}{x-4} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x-4} > 0.$$

Tā kā $x^2+x+4>0$ visiem *x*, tad ar intervālu metodi atrisinām nevienādību

$$\frac{x-1}{x-4} > 0 .$$

Atbilde: $x \in (1, 4)$.