Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 26. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

26.21. Dalībnieku skaitu simultantspēlē apzīmēsim ar *n*.

Tad pirmajās 2 stundās meistars spēlēja ar $0{,}6 \cdot n + 2$ dalībniekiem. Atlika $0{,}4 - 2$ dalībnieki. Nākošajās 2 stundās viņš spēlēja ar $0{,}4 \cdot n - 2$ dalībniekiem. Iegūstam vienādojumu

$$0{,}6 \cdot n + 2 + 0{,}4(0{,}4 \cdot n - 2) + 6 = n \quad \Leftrightarrow$$

$$0{,}24 \cdot n = 7{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad n = 30.$$

Tātad simultantspēlē piedalījās 30 dalībnieki.

26.22. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $\overline{ab}$. Tad

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b) = n^2.$$

Tas nozīmē, ka *n* dalās ar 11; tāpēc $11(a + b)$ dalās ar 121. Tas nozīmē, ka $a + b$ dalās ar 11. Tā kā *a* un *b* ir cipari, tad $a + b = 11$. Visi šādi skaitļi der, jo rezultātā iegūstam skaitli $121 = 11^2$.

Atbilde: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

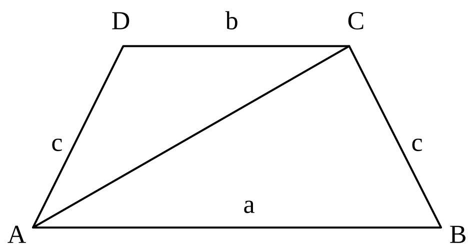
26.23. Izmantojot ekvivalentus pārveidojumus pierādām, ka no vienādības

$$a^2 + c^2 = 2b^2$$

seko vienādība

$$\frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+b} = 2\frac{1}{c+a}.$$

26.24. Skat. 26.1. zīmējumu.



26.1.

Ja $\angle BAC = \beta$, tad no sinusu teorēmas trijstūrim *ABC* seko, ka

$$\frac{a}{\sin\angle ACB}=\frac{c}{\sin\angle CAB} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{a}{\sin(180°-\alpha-(\alpha+\beta))}=\frac{c}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow$$

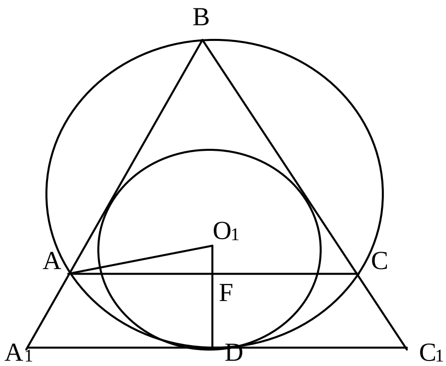
$$c=\frac{a\sin\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)}.$$

Pielietojot sinusu teorēmu trijstūrim *ADC*, atrodam, ka $b=\frac{a\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$.

Otrajā gadījumā, ja $\angle ACB=\beta$ analoģiski iegūstam

$$c=\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad b=\frac{a\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

26.25. Caur abu riņķa līniju pieskaršanās punktu *D* velkam pieskari, kas atšķeļ no leņķa $\angle ABC$ regulāru trijstūri A_1BC_1 (skat. 26.2. zīm.).



26.2. zīm.

Regulārā trijstūra A_1BC_1 augstums *BD* ir vienāds ar 2*R*; O_1 ir šā trijstūra centrs, tāpēc $O_1D=\frac{2R}{3}$. $DF=\frac{R}{2}$ (pamatojiet šo vienādību!).

Taisnleņķa trijstūrī *AFD* leņķis $\angle DAF=30°$; tātad $AF=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$$O_1F=O_1D-DF=\frac{R}{6}, \quad AO_1=\sqrt{AF^2+O_1F^2}=\frac{R\sqrt{7}}{3}.$$

Punkts O_1 atrodas trijstūra *ABC* iekšpusē, jo $O_1D>FD$.

26.26. Doto nevienādību pārveidojam formā

$$\frac{|x^2-3x-4|}{|x-4|}>3 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2-3x-4|>3|x-4|,\ x\neq 4.$$

Risinām to ar intervālu metodi.

1) $\begin{cases} x\le -1 \\ x^2-3x-4>-3x+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x^2>16. \end{cases}$

$x \in (-\infty; -4)$.

2) $\begin{cases} -1 < x < 4 \\ -x^2 + 3x + 4 > -3x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 4 \\ x^2 - 6x + 8 < 0. \end{cases}$

$x \in (2; 4)$.

3) $\begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 3x - 4 > -3x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 16 > 0. \end{cases}$

$x \in (4; \infty)$.

Atbilde: $x \in (-\infty; -4) \cup (2; 4) \cup (4; \infty)$.

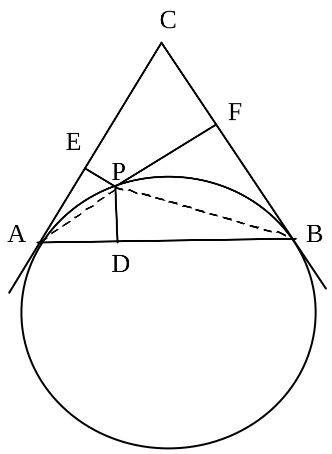
26.27. Uzrakstīsim doto skaitļu virkni pēc moduļa 2:

1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, ...

Tā ir periodiska, ar perioda garumu 5.

Skaitļu virknē pēc kārta nevar būt uzrakstīti cipari 1, 8, 7, 6, jo pēc moduļa 2 tie veido fragmentu 1, 0, 1, 0, kāds dotajā virknē nav sastopams.

26.28. Skat 26.3. zīm.



26.3. zīm.

No ievilkto leņķu un leņķa starp hordu un pieskari īpašībām seko vienādība

$$\angle EAP = \tfrac{1}{2} \overset{\cup}{AP} = \angle PBD .$$

No šejienes seko taisnleņķa trijstūru *PEA* un *PDB* līdzība. Tātad

$$\frac{PE}{PD} = \frac{PA}{PB} .$$

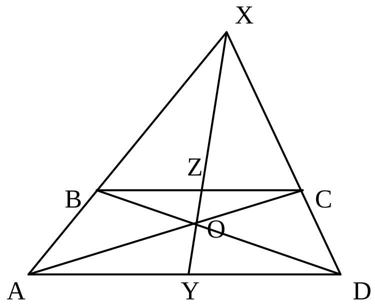
Analoģiski pierāda vienādību

$$\frac{PF}{PD} = \frac{PB}{PA}.$$

Sareizinot šīs vienādības iegūstam

$$\frac{PE \cdot PF}{PD^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad PD^2 = PE \cdot PF\ .$$

26.29. Skat. 26.4. zīm.



26.4. zīm.

Konstrukcijas gaita ir sekojoša.

Atrodam taišņu *AB* un *DC* krustpunktu *X*.

Atrodam nogriežņu *AC* un *BD* krustpunktu *O*.

Taisne *OX* dala trapeces *ABCD* laukumu uz pusēm.

Pierādījums. No trijstūru līdzībām

$$\Delta AOY \approx \Delta ZOC, \quad \Delta BOC \approx \Delta DOA, \quad \Delta ZOB \approx \Delta YOD$$

seko, ka $\frac{AY}{ZC} = \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{BO} = \frac{YD}{BZ}$.

No trijstūru līdzībām

$$\Delta XAY \approx \Delta XBZ, \quad \Delta XYD \approx \Delta XZC$$

seko, ka $\frac{AY}{BZ} = \frac{XY}{XZ} = \frac{YD}{ZC}$.

Sareizinot iegūtās vienādības, iegūstam $AY^2 = YD^2 \quad \Rightarrow \quad AY = YD$.

Līdzīgi pierāda, ka $BZ = ZC$.

Tātad trapecēm *ABZY* un *YZCD* ir vienādi augstumi un vienādas pamatu malas; līdz ar to trapeču laukumi ir vienādi.

26.30. Dotā taisnstūra diagonāle $\sqrt{410}$ nav samērojama ar taisnstūra malām, bet kaķa un peles ātrumi ir samērojami. Tādēļ pele var paglābties no kaķa, ja tā skries tikai pa diagonālēm.

26.31. Sasummējot dotos vienādojumus, iegūstam

$$\left(\sqrt{x + y^2}\right)^3 = 125 \quad \Rightarrow \quad x + y^2 = 25 \text{ un } y\sqrt{x} = -12\,.$$

No šejienes iegūstam atrisinājumus: $\{(16, -3), (9, -4)\}$.

26.32. Vienādojumu var pārveidot formā

$$\sin 2x = \pm 2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}\,.$$

Atrisinājums eksistē, ja $\frac{1}{2} \le a \le 1$.

$$x = \pm \arcsin 2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

26.33. Uzrakstīsim virkni 8^n pēc moduļa 10. Iegūstam

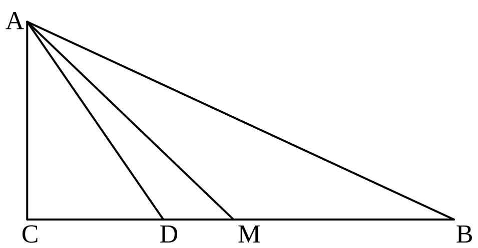
8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, ...

Tā ir periodiska ar perioda garumu 4. Tā kā $\overbrace{33\cdots371}^{1976} = 4k+3$, tad

$$\underbrace{888\cdots88}_{1976}{}^{\overbrace{333\cdots33371}^{1976}} \equiv 8^3 \equiv 2 \pmod{10}.$$

Tātad dotā skaitļa pēdējais cipars ir 2.

26.34. Aplūkosim 26.5. zīmējumu (*AM* -- mediāna, *AD* -- bisektrise).



26.5. zīm.

Meklējamo leņķi $\angle DAM$ apzīmēsim ar *x*. Tad

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{2}\cdot\frac{CB}{CA} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{2} + x = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

26.35. Aplūkosim 2 no dotajām taisnēm *a* un *b*, to krustpunktu *O* un plakni π, kurai tās pieder. Pastāv divas iespējas:

a) Visas pārējās taisnes pieder plaknei π.

b) Kāda no taisnēm *c* nepieder plaknei π; tā kā tā krustojas ar abām taisnēm *a* un *b*, tad tā iet caur punktu *O*. Jebkura no atlikušajām taisnēm arī ies caur punktu *O*, jo pretējā gadījumā tā nevarēs krustot taisnes *a*, *b* un *c*.

26.36. Kāpināsim abus vienādojumus kvadrātā un saskaitīsim:

$$\frac{x^2\left(y^4+2y^2+1\right)+y^2\left(x^4-2x^2+1\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+y^2+x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)}=1 \quad \Leftrightarrow$$

$$1+x^2y^2=x^2+y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)=0.$$

Tā kā $x^2-1\neq 0$ (tas seko no otrā vienādojuma), tad $y=\pm 1$.

Atbilde: $(x,\ y)\in\left\{(3,1),\left(\frac{1}{3},-1\right)\right\}$.

26.37. Pārveidojot doto vienādojumu, iegūstam

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\cos 4x=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}+2\cos^2 2x-1=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cos^3 2x+2\cos^2 2x-2\cos 2x=0 \\ \cos 2x\neq -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos 2x=0 \quad \text{vai} \quad \cos^2 2x+\cos 2x-1=0.$$

Atbilde: $x\in\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n;\quad n\in Z\right\}$.

26.38. Dotā nevienādība ekvivalenta nevienādībai

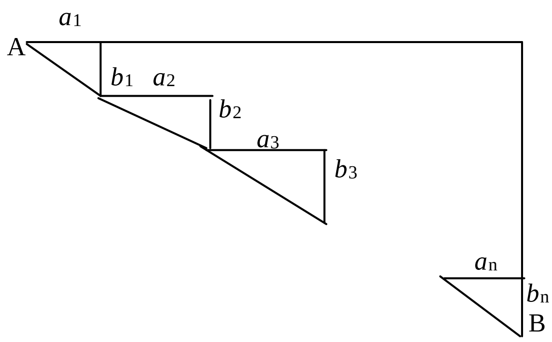
$$\log_x(x+2)\leq 2.$$

Jāanalizē 2 gadījumi: $x>1$ un $0<x<1$.

Atbilde: $x\geq 2$.

26.39. Šķautnes CC_1 krustpunktu ar novilkto plakni apzīmējam ar C_2. Viegli pierādīt, ka $CC_2=\frac{3}{4}a$. Caur punktu C_2 velkam plakni $A_2B_2C_2D_2$ paralēli kuba skaldnei *ABCD*. Tad paralēlskaldņa $ABCDA_2B_2C_2D_2$ tilpums ir vienāds ar $\frac{3}{4}a^3$. No simetrijas seko, ka vienas atšķeltās daļas tilpums ir puse no šā paralēlskaldņa tilpuma; tātad $\frac{3}{8}a^3$. Otras atšķeltās daļas tilpums ir $\frac{5}{8}a^3$, un šo daļu tilpumu attiecība ir $\frac{3}{5}$.

26.40. Dotos taisnleņķa trijstūrus izvietosim tā, kā parādīts 26.6. zīmējumā.



26.6. zīm.

Doto trijstūru hipotenūzu summa ir lauzta līnija, kas savieno punktus *A* un *B*; tā būs vismazākā, ja šī līnija būs nogrieznis *AB*. Tātad pārējo katešu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ garumiem jābūt proporcionāliem doto katešu garumiem. Tātad

$$b_i = \frac{b \cdot a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$