

Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

## LATVIJAS RAJONU 26. OLIMPIĀDE

### 8. klase

**26.21.** Šaha meistars spēlēja simultantspēli pie vairākiem galdiņiem. Pirmajās divās stundās viņš uzvarēja 60 % no visiem dalībniekiem, bet divas partijas zaudēja. Nākamo divu stundu laikā meistars spēli pabeidza. 40 % no atlikušajiem dalībniekiem viņš uzvarēja, piecas partijas beidzās neizšķirti un vienu zaudēja. Ar cik dalībniekiem meistars spēlēja?

**26.22.** Atrast visus divciparu skaitļus, kuru summa ar skaitli, kas pierakstīts ar tiem pašiem cipariem otrādā kārtībā, ir naturāla skaitļa kvadrāts.

**26.23.** Skaitļi  $a^2, b^2, c^2$  veido aritmētisku progresiju, kuras difference nav 0. Pierādīt, ka skaitļi  $\frac{1}{c+b}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$  arī veido aritmētisku progresiju.

**26.24.** Vienādsānu trapeces pamata mala ir  $a$ , bet diagonāle veido ar pamata malu leņķi  $\alpha$  un ar sānu malu leņķi  $\beta$ . Aprēķināt pārējo trapeces malu garumus.

**26.25.** Ap regulāru trijstūri  $ABC$  apvilka riņķa līnija ar rādiusu  $R$ . Cita riņķa līnija ar centru punktā  $O_1$  pieskaras trijstūra malām  $AB$  un  $BC$  un apviltajai riņķa līnijai. Atrast attālumu  $O_1A$ . Noskaidrot, vai  $O_1$  atrodas trijstūrī  $ABC$  vai ārpus tā.

### 9. klase

**26.26.** Atrisināt nevienādību

$$\sqrt{\frac{(x^2 - 3x - 4)^2}{x^2 - 8x + 16}} - 3 > 0 .$$

**26.27.** Dota skaitļu virkne 1, 9, 7, 6, 3, ..., kurā katrs nākamais elements, sākot ar piekto, ir vienāds ar iepriekšējo četru elementu summas pēdējo ciparu. Vai ir iespējams, ka četri cits citam sekojoši virknes elementi ir 1, 8, 7, 6 ? Apgalvojumu pamatot.

**26.28.** Riņķa līnijā ievilkta horda  $AB$  un tās galapunktos novilkta pieskares  $AC$  un  $BC$ . No patvaļīga riņķa līnijas punkta  $P$  vilkti perpendikuli pret hordu un pieskarēm:  $PD, PE, PF$ . Pierādīt, ka  $PD^2 = PE \cdot PF$ .

**26.29.** Izmantojot tikai lineālu, sadalīt doto trapeci divās daļās, kuru laukumi ir vienādi.

**26.30.** Dots taisnstūris, kura malas ir 11 m un 17 m. Taisnstūra centrā tup pele, bet vienā virsotnē -- kaķis. Kaķis var skriet tikai pa taisnstūra malām, bet pele -- pa malām un diagonālēm. Kaķa ātrums ir 10 reizes lielāks par peles ātrumu. Gan kaķis, gan pele var mainīt kustības virzienu tikai taisnstūra virsotnēs vai centrā. Viņi abi sāk skriet reizē un skrien bez apstāšanās. Kaķis vienmēr zina, kur atrodas pele, bet pele nekad nezina, ko dara un kur atrodas kaķis. Vai pele var paglābties no kaķa.

## 10. klase

**26.31.** Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} (x + y\sqrt{x + y^2})\sqrt{x + y^2} = 65 \\ (x - y\sqrt{x + y^2})\sqrt{x + y^2} = 185. \end{cases}$$

**26.32.** Noskaidrot, ar kādām  $a$  vērtībām vienādojumam

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

eksistē atrisinājums, un atrast šo atrisinājumu.

**26.33.** Atrast skaitļa  $\underbrace{888 \dots 88}_{1976}$  pēdējo ciparu.

**26.34.** Aprēķināt leņķi starp mediānu un bisektrisi, kas vilktas taisnleņķa trijstūrī no šaurā leņķa  $\alpha$  virsotnes.

**26.35.** Dotas  $n$  taisnes. Jebkuras divas no tām krustojas. Pierādīt, ka visas dotās taisnes atrodas vienā plaknē vai arī iet caur vienu punktu.

## 11. klase

26.36. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\frac{x(y^2 + 1)}{x^2 + y^2} = \frac{3}{5}, \quad \frac{y(x^2 - 1)}{x^2 + y^2} = \frac{4}{5}.$$

26.37. Atrisināt vienādojumu  $\operatorname{tg}^2 x + \cos 4x = 0$ .

26.38. Atrisināt nevienādību  $\log_{\frac{1}{2}}(\log_x(x+2)) \geq -1$ .

26.39. Dots kubs  $ABCD A' B' C' D'$ . Caur virsotni  $A$ , šķautnes  $DD'$  viduspunktu un skaldnes  $BB' C' C$  centru novilkta plakne. Atrast to daļu tilpumu attiecību, kurās šī plakne sadala kubu.

26.40.  $n$  taisnleņķa trijstūros dots pa katetei ar garumiem  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , bet  $n$  pārējo katešu garumu summa ir  $b$ . Kādiem jābūt šo katešu garumiem, lai visu trijstūru hipotenūzu garumu summa būtu vismazākā iespējamā? Atrisināt uzdevumu, ja

- a)  $n = 2$ ,
- b)  $n = 3$ ,
- c) vispārīgajā gadījumā.