

Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 27. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

8. klase

27.21. Doto izteiksmi var pārveidot formā

$$\frac{x-1}{x^2-x-1}.$$

27.22. Vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14 \\ x^2 + y^2 + xy = 84. \end{cases}$$

pirmo vienādojumu pārveidojam formā

$$\begin{aligned} x + y + \sqrt{xy} = 14 &\Leftrightarrow x + y - 14 = \sqrt{xy} \Rightarrow \\ x^2 + y^2 + 2xy + 196 - 28(x + y) &= xy \Rightarrow \\ x^2 + y^2 + xy + 196 - 28(x + y) &= 0 \Rightarrow \\ 84 + 196 - 28(x + y) &= 0 \Rightarrow x + y = 10. \end{aligned}$$

Ievietojot $x = 10 - y$ otrajā vienādojumā, iegūstam kvadrātvienādojumu, kura saknes ir 2 un 8.

Atbilde: $\{(2, 8), (8, 2)\}$. (Nepieciešama pārbaude).

27.23. Apzīmēsim dotos skaitļus ar x , y un z . Tad iegūsim vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} xz = y^2 \\ x + z = 2 \cdot (y + 8) \\ x \cdot (z + 64) = (y + 8). \end{cases}$$

Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūstam atbildi: $x = 4$, $y = 12$, $z = 36$.

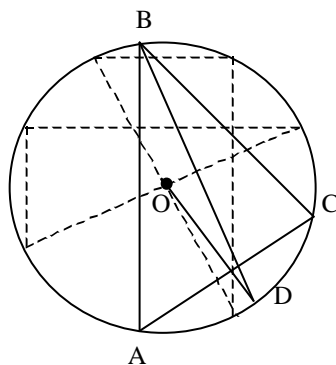
27.24. Ja $b \leq a$, tad

$$h = \frac{b \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Ja $b > a$, tad

$$h = a \cdot (\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \sin \alpha - \operatorname{tg}(\alpha + b)) + b \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \chi).$$

27.25. Ar uzstūra palīdzību ievēl riņķa līnijā divus taisnleņķa trijstūrus. To hipotenūzu krustpunkts O ir riņķa līnijas centrs (skat. 27.4. zīm.).



27.4. zīm.

Novelk hordu AC , uz kuras balstās dotais ievilktais leņķis un rādiusu OD , kas perpendikulārs šai hordai; tas daļa hordas savilkto loku uz pusēm. Stars, kas vilkts no ievilkta leņķa virsotnes caur loka viduspunktu, ir ievilkta leņķa bisektrise.

9. klase

27.26. Doto vienādojumu $11^x - 8^y = 1$ pārveidosim šādi:

$$11^x - 1 = 8^y.$$

Vienādības kreisās puses pēdējais cipars ir 0, bet labās puses izteiksmes pēdējais cipars nevar būt 0; tātad vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos

27.27. No nevienādības $a_i \leq 6$ seko nevienādība

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}} \leq \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}}}_{n \text{ } \sqrt{\text{zimes}}} = x_n.$$

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka $x_n < 3$.

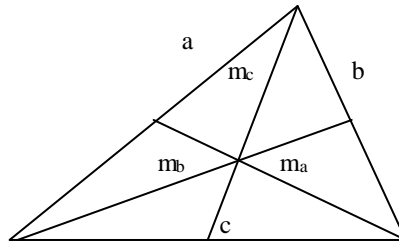
Bāze: $x_1 = \sqrt{6} < 3$.

Induktīvā pāreja: pieņemsim, ka $x_k < 3$. Tad

$$x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} < \sqrt{6 + 3} = 3.$$

Apgalvojums pierādīts.

27.28. No kosinusu teorēmas seko, ka (skat. 27.5. zīm.)



27.5. zīm.

$$m_a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab \cos \angle C,$$

$$m_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - ab \cos \angle C,$$

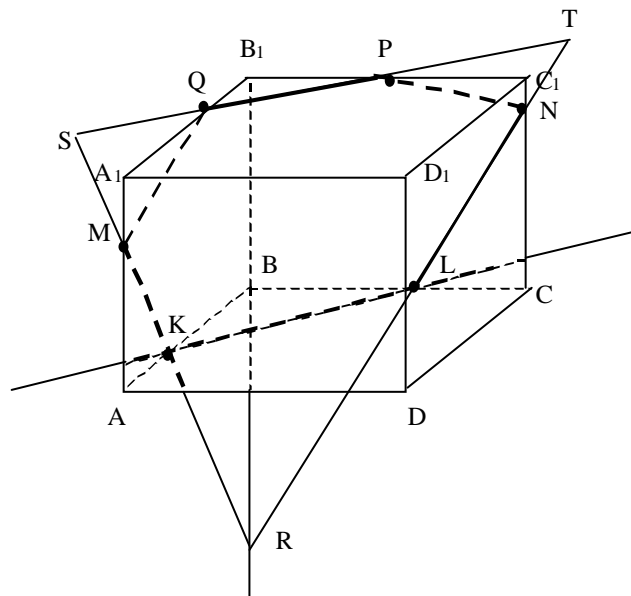
$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - \frac{1}{2} ab \cos(\angle A + \angle B) = \frac{a^2 + b^2}{4} - \frac{1}{2} ab \cos \angle C.$$

Ievietojot šīs vienādības dotajā vienādībā, iegūstam

$$-2ab \cos \angle C = \frac{5}{2} ab \cos \angle C \Rightarrow \cos \angle C = 0 \Rightarrow \angle C = 90^\circ.$$

Prasītais pierādīts.

27.29. Konstruācijas gaita ir sekojoša (skat. 27.6. zīm.):



27.6. zīm.

$$MK \cap BB_1 = R;$$

šis punkts pieder šķēluma plaknei un plaknei BB_1C_1C .

$$RL \cap CC_1 = N;$$

$$RL \cap B_1C_1 = T.$$

Punkts T pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$.

$$MK \cap A_1B_1 = S.$$

Punkts S pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$.

$$ST \cap A_1B_1 = Q;$$

$$ST \cap B_1C_1 = P.$$

Meklējamais šķēlums ir sešstūris $KMQPNL$.

Šķēlumā var izveidoties arī piecstūris, ja šķēluma plakne krusto nogriezni BB_1 tā iekšējā punktā.

27.30. Apzīmēsim biļetes numuru ar \overline{abcdef} . Pēc uzdevuma nosacījumiem $a + b + c = d + e + f$. Jānoskaidro, cik dažādos veidos skaitli 9 var izteikt kā 3 ciparu summu. Uzrakstīsim virknē 11 vieniniekus un divus no tiem aizstāsim ar "*":

$$111*1*11111.$$

Šim sadalījumam viennozīmīgi atbilst ciparu summa (piemēram, konkrētajā gadījumā summa $3+1+5$). Izvēlēties divas zvaigznītes no 11 elementiem var $C_{11}^2 = 55$ veidos. Tā kā katrā no trīs ciparu grupām mēs neatkarīgi varam izvēlēties trīs ciparus, kas summā dod 9, tad kopējais laimīgo biļešu skaits ir $55 \cdot 55 = 3025$.

27.31. Doto vienādojumu $11^x - 8^y = 1$ pārveidosim šādi:

$$11^x - 1 = 8^y.$$

Vienādības kreisās puses pēdējais cipars ir 0, bet labās puses izteiksmes pēdējais cipars nevar būt 0; tātad vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos

27.32. No vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y \\ x^4 + y^4 = \frac{1}{2}(x + y)^2. \end{cases}$$

iegūstam

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= \frac{1}{2}(x + y)^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 = \frac{1}{2}x^4 + x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4 \Rightarrow \\ x^4 + y^4 &= 2x^2y^2. \end{aligned}$$

No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka

$$x^4 + y^4 \geq 2\sqrt{x^4y^4} = 2x^2y^2,$$

turklāt vienādība izpildās tikai tad, kad skaitļi x^4 un y^4 ir vienādi.

a) Ja $x = -y$, tad $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

b) Ja $x = y$, tad no pirmā vienādojuma iegūstam

$$2x^2 = 2x \Rightarrow x = y = 0 \text{ vai } x = y = 1.$$

27.33. Taisnleņķa trijstūrim izpildās vienādības

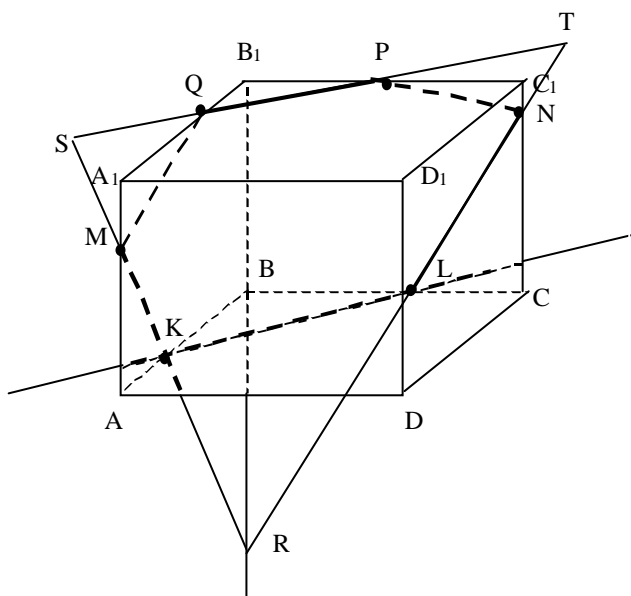
$$m_a^2 + m_b^2 = \frac{5}{4}c^2, \quad r = \frac{a+b-c}{2}$$

un nevienādība $a+b \leq c\sqrt{2}$ (pierādiet tās!).

Tātad

$$\frac{r^2}{m_a^2 + m_b^2} = \frac{(a+b-c)^2}{5c^2} \leq \frac{c^2(\sqrt{2}-1)^2}{5c^2} = \frac{3-\sqrt{8}}{5}.$$

27.34. Konstruācijas gaita ir sekojoša (skat. 27.7. zīm.):



27.7. zīm.

$$MK \cap BB_1 = R;$$

šis punkts pieder šķēluma plaknei un plaknei BB_1C_1C .

$$RL \cap CC_1 = N;$$

$$RL \cap B_1C_1 = T.$$

Punkts T pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$.

$$MK \cap A_1B_1 = S.$$

Punkts S pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$.

$$ST \cap A_1B_1 = Q;$$

$$ST \cap B_1C_1 = P.$$

Meklējamais šķēlums ir sešstūris $KMQPNL$.

Šķēlumā var izveidoties arī piecstūris, ja šķēluma plakne krusto nogriezni BB_1 tā iekšējā punktā.

27.35. Dotā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai

$$\begin{aligned} \frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} &\geq \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \\ \frac{\sin^{n+2} x - \cos^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x - \sin^{n+2} x}{\sin^n x} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{(\sin^{n+2} x - \cos^{n+2} x) \cdot (\sin^n x - \cos^n x)}{\cos^n x \cdot \sin^n x} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (\sin^{n+2} x - \cos^{n+2} x) \cdot (\sin^n x - \cos^n x) &\geq 0. \end{aligned}$$

Ja $\sin x \geq \cos x$, tad abi reizinātāji ir nenegatīvi, un viss reizinājums ir pozitīvs; ja $\sin x < \cos x$, tad abi reizinātāji ir negatīvi, un viss reizinājums ir pozitīvs.

27.36. Doto vienādojumu $11^x - 8^y = 1$ pārveidosim šādi:

$$11^x - 1 = 8^y.$$

Vienādības kreisās puses pēdējais cipars ir 0, bet labās puses izteiksmes pēdējais cipars nevar būt 0; tātad vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos

27.37. Sareizināsim divus dotos vienādojumus:

$$\begin{aligned} \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) \cdot \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) &= \frac{9}{2} \Rightarrow \\ \frac{(\cos^2 x + 1)(\sin^2 x + 1)}{\cos x \sin x} &= \frac{9}{2} \Rightarrow \\ \frac{\cos^2 x \sin^2 x + 2}{\cos x \sin x} &= \frac{9}{2} \Rightarrow \\ \sin x \cos x + \frac{2}{\sin x \cos x} &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

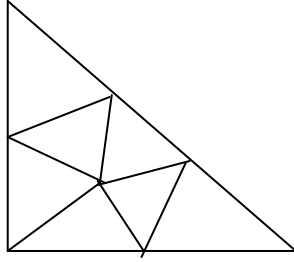
Apzīmēsim $t = \sin 2x$; tad iegūsim

$$\frac{t}{2} + \frac{4}{t} = \frac{9}{2} \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 8 \text{ (neder).}$$

Tātad $\sin 2x = 1$; un $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $y = \arctg \frac{1}{9} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \pi n$ $k, n \in \mathbb{Z}$.

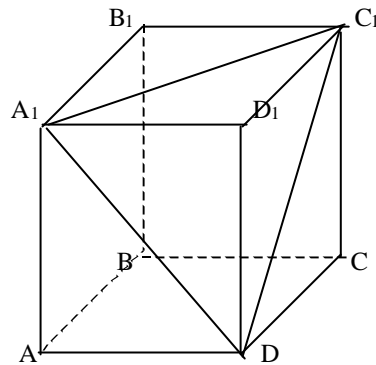
27.38. Atbilde: $a \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

27.39. Jā, to var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 27.8. zīm.



27.8. zīm.

27.40. Taisnstūra paralēlskaldņa ortogonālā projekcija (ēna) attēlota 27.9 zīmējumā,



27.9. zīm.

Tā kā $S_{A_1D_1D} = \frac{1}{2} S_{A_1D_1DA}$, $S_{D_1A_1C_1} = \frac{1}{2} S_{A_1B_1C_1D_1}$, $S_{DD_1C_1} = \frac{1}{2} S_{DD_1C_1C}$, tad ēnas laukums ir vienāds ar divkārtotu trijstūra A_1C_1D laukumu. Trijstūra laukums projekcijā ir maksimālais, ja staru kūlis perpendikulārs trijstūra plaknei; tad trijstūra ēnas laukums ir vienāds ar trijstūra laukumu, ko aprēķina pēc Herona formulas. Iegūstam, ka taisnstūra mestās ēnas maksimālais laukums ir $\sqrt{769} \text{ cm}^2$.