Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 27. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

8. klase

27.21. Doto izteiksmi var pārveidot formā

$$\frac{x-1}{x^2-x-1}.$$

27.22. Vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14 \\ x^2+y^2+xy=84. \end{cases}$$

pirmo vienādojumu pārveidojam formā

$$x+y+\sqrt{xy}=14 \quad \Leftrightarrow \quad x+y-14=\sqrt{xy} \quad \Rightarrow$$
$$x^2+y^2+2xy+196-28(x+y)=xy \quad \Rightarrow$$
$$x^2+y^2+xy+196-28(x+y)=0 \quad \Rightarrow$$
$$84+196-28(x+y)=0 \quad \Rightarrow \quad x+y=10.$$

Ievietojot $x=10-y$ otrajā vienādojumā, iegūstam kvadrātvienādojumu, kura saknes ir 2 un 8.

Atbilde: $\{(2,8),(8,2)\}$. (Nepieciešama pārbaude).

27.23. Apzīmēsim dotos skaitļus ar *x*, *y* un *z*. Tad iegūsim vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} xz=y^2 \\ x+z=2\cdot(y+8) \\ x\cdot(z+64)=(y+8). \end{cases}$$

Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūstam atbildi: $x=4,\ y=12,\ z=36.$

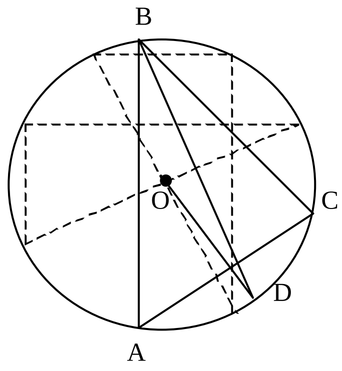
27.24. Ja $b\le a$, tad

$$h=\frac{b\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Ja $b>a$, tad

$$h=a\cdot(\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\sin\alpha-\operatorname{tg}(\alpha+b))+b\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\chi).$$

27.25. Ar uzstūra palīdzību ievelk riņķa līnijā divus taisnleņķa trijstūrus. To hipotenūzu krustpunkts O ir riņķa līnijas centrs (skat. 27.4. zīm.).



27.4. zīm.

Novelk hordu *AC*, uz kuras balstās dotais ievilktais leņķis un rādiusu *OD*, kas perpendikulārs šai hordai; tas dala hordas savilkto loku uz pusēm. Stars, kas vilkts no ievilktā leņķa virsotnes caur loka viduspunktu, ir ievilktā leņķa bisektrise.

9. klase

27.26. Doto vienādojumu $11^x - 8^y = 1$ pārveidosim šādi:

$$11^x - 1 = 8^y .$$

Vienādības kreisās puses pēdējais cipars ir 0, bet labās puses izteiksmes pēdējais cipars nevar būt 0; tātad vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos

27.27. No nevienādības $a_i \le 6$ seko nevienādība

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}} \le \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}}}_{n \ \sqrt{\ } \ \text{zimes}} = x_n .$$

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka $x_n < 3$.

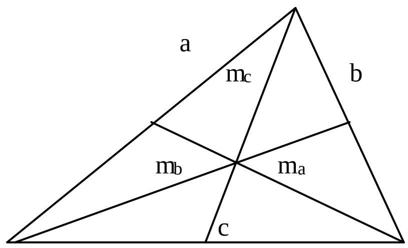
Bāze: $x_1 = \sqrt{6} < 3$.

Induktīvā pāreja: pieņemsim, ka $x_k < 3$. Tad

$$x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} < \sqrt{6 + 3} = 3.$$

Apgalvojums pierādīts.

27.28. No kosinusu teorēmas seko, ka (skat. 27.5. zīm.)



27.5. zīm.

$$m_a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab\cos\angle C,$$

$$m_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - ab\cos\angle C,$$

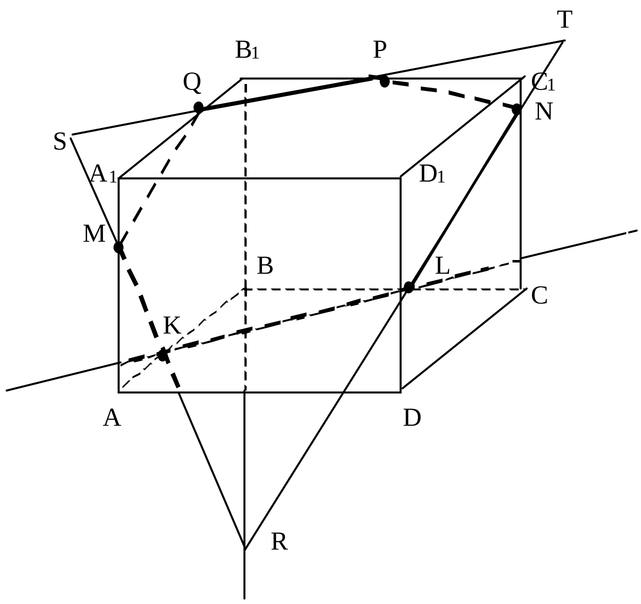
$$m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{4} - \frac{1}{2}ab\cos(\angle A + \angle B) = \frac{a^2+b^2}{4} - \frac{1}{2}ab\cos\angle C.$$

Ievietojot šīs vienādības dotajā vienādībā, iegūstam

$$-2ab\cos\angle C = \frac{5}{2}ab\cos\angle C \quad \Rightarrow \quad \cos\angle C = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle C = 90^\circ.$$

Prasītais pierādīts.

27.29. Konstrukcijas gaita ir sekojoša (skat. 27.6. zīm.):



27.6. zīm.

$$MK \cap BB_1 = R;$$

šis punkts pieder šķēluma plaknei un plaknei BB_1C_1C.

$RL \cap CC_1 = N$;

$RL \cap B_1C_1 = T$.

Punkts *T* pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$.

$MK \cap A_1B_1 = S$.

Punkts *S* pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$.

$ST \cap A_1B_1 = Q$;

$ST \cap B_1C_1 = P$.

Meklējamais šķēlums ir sešstūris $KMQPNL$.

Šķēlumā var izveidoties arī piecstūris, ja šķēluma plakne krusto nogriezni BB_1 tā iekšējā punktā.

27.30. Apzīmēsim biļetes numuru ar $\overline{abcdef}$. Pēc uzdevuma nosacījumiem $a+b+c=d+e+f$. Jānoskaidro, cik dažādos veidos skaitli 9 var izteikt kā 3 ciparu summu. Uzrakstīsim virknē 11 vieniniekus un divus no tiem aizstāsim ar "*":

111*1*11111.

Šim sadalījumam viennozīmīgi atbilst ciparu summa (piemēram, konkrētajā gadījumā summa $3+1+5$). Izvēlēties divas zvaigznītes no 11 elementiem var $C_{11}^2 = 55$ veidos. Tā kā katrā no trīs ciparu grupām mēs neatkarīgi varam izvēlēties trīs ciparus, kas summā dod 9, tad kopējais laimīgo biļešu skaits ir $55 \cdot 55 = 3025$.

27.31. Doto vienādojumu $11^x - 8^y = 1$ pārveidosim šādi:

$$11^x - 1 = 8^y .$$

Vienādības kreisās puses pēdējais cipars ir 0, bet labās puses izteiksmes pēdējais cipars nevar būt 0; tātad vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos

27.32. No vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y \\ x^4 + y^4 = \dfrac{1}{2}(x+y)^2. \end{cases}$$

iegūstam

$$x^4 + y^4 = \frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 = \frac{1}{2}x^4 + x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4 \quad \Rightarrow$$

$$x^4 + y^4 = 2x^2y^2.$$

No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka

$$x^4 + y^4 \geq 2\sqrt{x^4y^4} = 2x^2y^2 ,$$

turklāt vienādība izpildās tikai tad, kad skaitļi x^4 un y^4 ir vienādi.

a) Ja $x=-y$, tad $x^2+y^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=y=0$.

b) Ja $x=y$, tad no pirmā vienādojuma iegūstam

$$2x^2=2x \quad \Rightarrow \quad x=y=0 \text{ vai } x=y=1.$$

27.33. Taisnleņķa trijstūrim izpildās vienādības

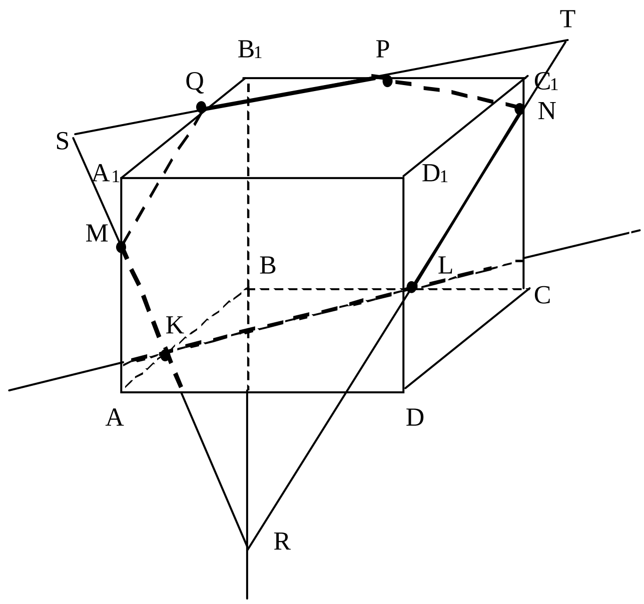
$$m_a^2+m_b^2=\frac{5}{4}c^2,\ r=\frac{a+b-c}{2}$$

un nevienādība $a+b\le c\sqrt{2}$ (pierādiet tās!).

Tātad

$$\frac{r^2}{m_a^2+m_b^2}=\frac{(a+b-c)^2}{5c^2}\le\frac{c^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{5c^2}=\frac{3-\sqrt{8}}{5}.$$

27.34. Konstrukcijas gaita ir sekojoša (skat. 27.7. zīm.):



27.7. zīm.

$$MK \cap BB_1 = R;$$

šis punkts pieder šķēluma plaknei un plaknei BB_1C_1C.

$$RL \cap CC_1 = N;$$

$$RL \cap B_1C_1 = T.$$

Punkts T pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$.

$$MK \cap A_1B_1 = S.$$

Punkts S pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$.

$$ST \cap A_1B_1 = Q;$$

$$ST \cap B_1C_1 = P.$$

Meklējamais šķēlums ir sešstūris $KMQPNL$.

Šķēlumā var izveidoties arī piecstūris, ja šķēluma plakne krusto nogriezni BB_1 tā iekšējā punktā.

27.35. Dotā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai

$$\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geq \sin^2 x + \cos^2 x \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin^{n+2} x - \cos^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x - \sin^{n+2} x}{\sin^n x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\sin^{n+2} x - \cos^{n+2} x\right) \cdot \left(\sin^n x - \cos^n x\right)}{\cos^n x \cdot \sin^n x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\sin^{n+2} x - \cos^{n+2} x\right) \cdot \left(\sin^n x - \cos^n x\right) \geq 0.$$

Ja $\sin x \geq \cos x$, tad abi reizinātāji ir nenegatīvi, un viss reizinājums ir pozitīvs; ja $\sin x < \cos x$, tad abi reizinātāji ir negatīvi, un viss reizinājums ir pozitīvs.

27.36. Doto vienādojumu $11^x - 8^y = 1$ pārveidosim šādi:

$$11^x - 1 = 8^y.$$

Vienādības kreisās puses pēdējais cipars ir 0, bet labās puses izteiksmes pēdējais cipars nevar būt 0; tātad vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos

27.37. Sareizināsim divus dotos vienādojumus:

$$\left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) \cdot \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\cos^2 x + 1\right)\left(\sin^2 x + 1\right)}{\cos x \sin x} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\cos^2 x \sin^2 x + 2}{\cos x \sin x} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\sin x \cos x + \frac{2}{\sin x \cos x} = \frac{9}{2}.$$

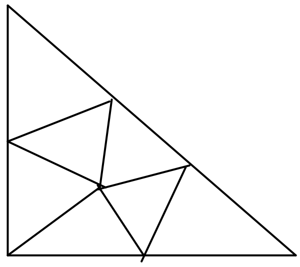
Apzīmēsim $t = \sin 2x$; tad iegūsim

$$\frac{t}{2} + \frac{4}{t} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1, t_2 = 8 \text{ (neder)}.$$

Tātad $\sin 2x = 1$; un $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \quad y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{9}\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi n \quad k, n \in Z$.

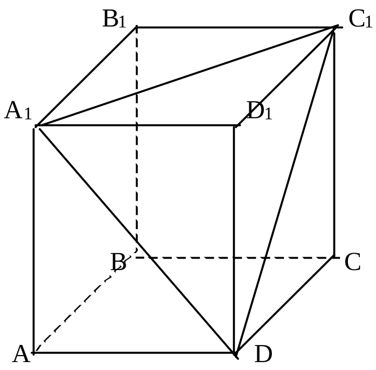
27.38. Atbilde: $a \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$.

27.39. Jā, to var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 27.8. zīm.



27.8. zīm.

27.40. Taisnstūra paralēlskaldņa ortogonālā projekcija (ēna) attēlota 27.9 zīmējumā,



27.9. zīm.

Tā kā $S_{A_1D_1D} = \dfrac{1}{2} S_{A_1D_1DA}$, $S_{D_1A_1C_1} = \dfrac{1}{2} S_{A_1B_1C_1D_1}$, $S_{DD_1C_1} = \dfrac{1}{2} S_{DD_1C_1C}$, tad ēnas laukums ir vienāds ar divkāršotu trijstūra A_1C_1D laukumu. Trijstūra laukums projekcijā ir maksimālais, ja staru kūlis perpendikulārs trijstūra plaknei; tad trijstūra ēnas laukums ir vienāds ar trijstūra laukumu, ko aprēķina pēc Herona formulas. Iegūstam, ka taisnstūra mestās ēnas maksimālais laukums ir $\sqrt{769}\ \ cm^2$.