

Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 27. OLIMPIĀDE

8. klase

27.21. Vienkāršot izteiksmi

$$\left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4} - \frac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x} \right) : \left(\frac{1+x}{x^3+x^4+x^5} - \frac{1-x+x^2}{x^3} \right).$$

27.22. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14 \\ x^2 + y^2 + xy = 84. \end{cases}$$

27.23. Trīs veseli skaitļi veido ģeometrisku progresiju. Ja tās otro locekli palielina par 8, tad skaitļi veido aritmētisku progresiju, bet, ja vēl palielina trešo locekli par 64, tad atkal iegūst ģeometrisku progresiju. Atrast sākumā dotos skaitļus.

27.24. Kalna nogāze beidzas ar līdzenumu un veido ar horizontālo līmeni leņķi α . Saules stari krīt nogāzes virzienā uz leju un ar nogāzi veido leņķi β , bet ar horizontālo virzienu leņķi $\alpha+\beta$. Uz nogāzes a metru attālumā no tās pamata aug koks, kura ēnas garums uz zemes ir b metri. Aprēķināt koka augstumu.

27.25. Riņķa līnijā, kuras rādiuss nav lielāks par 12 cm, ievilkts leņķis. Riņķa centrs zīmējumā nav atzīmēts. Skolēna rīcībā ir tikai viens uzstūris, kura hipotenūzas garums ir ne mazāks par 25 cm. Kā jāriņķojas skolēnam, lai konstruētu ievilkta leņķa bisektrisi?

Uzstūris ir figūra, kas sastāv no diviem savstarpēji perpendikulāriem nogriežņiem ar kopīgiem galapunktiem (skat. 27.1. zīm.).



27.1. zīm.

9. klase

27.26. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$11^x - 8^y = 1.$$

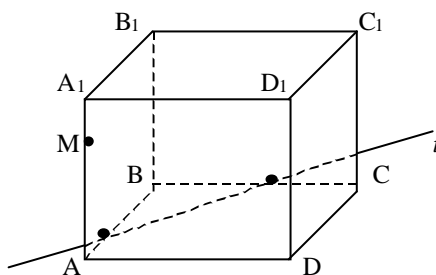
27.27. Pierādīt nevienādību

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}}}}} < 3,$$

ja $0 < a_i \leq 6$ katram naturālam i .

27.28. Trijstūrī ABC pareiza vienādība $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$. Pierādīt, ka ABC ir taisnleņķa trijstūris.

27.29. Dots kubs $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Uz šķautnes AA_1 atzīmēts viduspunkts M , bet skaldnes $ABCD$ plaknē dota taisne t . Caur taisni t un punktu M novilkta plakne P . Konstruēt figūru, kas veidojas, plaknei P šķēļoties ar kubu, ja taisne t krusto šķautnes AB un BC iekšējos punktos (skat. 27.2. zīm.).



27.2 zīm.

Noskaidrot, kāds malu skaits var būt šķēluma daudzstūrim atkarībā no t stāvokļa, ja t stāvoklis plaknē $ABCD$ ir patvaļīgs. Katru gadījumu ilustrēt ar zīmējumu.

27.30. Kādā pilsētā grupa māņticīgu cilvēku uzskata, ka autobusa biļete ir laimīga, ja tās numuru ciparu summa ir 18, bet otra grupa par laimīgu uzskata tādu biļeti, kurai pirmo trīs ciparu summa vienāda ar pēdējo trīs ciparu summu. Noskaidrot, cik ir tādu autobusa biļešu numuru, kurus abas māņticīgo cilvēku grupas reizē uzskata par laimīgām. (Numurā ir 6 cipari, pirmais cipars var būt arī 0.)

10. klase

27.31. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$11^x - 8^y = 1.$$

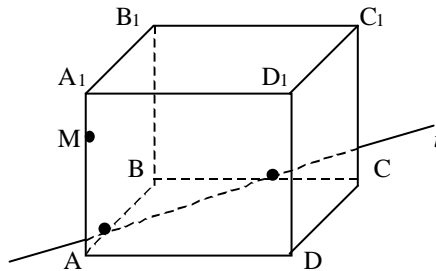
27.32. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y \\ x^4 + y^4 = \frac{1}{2}(x + y)^2. \end{cases}$$

27.33. Pierādīt, ka taisnleņķa trijstūrī pareiza nevienādība

$$\frac{r^2}{m_a^2 + m_b^2} \leq \frac{3 - \sqrt{8}}{5}.$$

27.34. Dots kubs $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Uz šķautnes AA_1 atzīmēts viduspunkts M , bet skaldnes $ABCD$ plaknē dota taisne t . Caur taisni t un punktu M novilkta plakne P . Konstruēt figūru, kas veidojas, plaknei P šķeļoties ar kubu, ja taisne t krusto šķautnes AB un BC iekšējos punktus (skat 27.3. zīm.).



27.3 zīm.

Noskaidrot, kāds malu skaits var būt šķēluma daudzstūrim atkarībā no t stāvokļa, ja t stāvoklis plaknē $ABCD$ ir patvaļīgs. Katru gadījumu ilustrēt ar zīmējumu.

27.35. Pierādīt nevienādību

$$\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geq 1, \text{ ja } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

11. klase

27.36. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$11^x - 8^y = 1.$$

27.37. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \cos x + \frac{1}{\cos x} = 9 \operatorname{tg} y \\ \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} y . \end{cases}$$

27.38. Atrast tās parametra a vērtības, ar kurām funkcijas

$$f(x) = x^2 + (a+1)^2 + 2|x+a-1|$$

minimums lielāks nekā 4.

27.39. Vai vienādsānu taisnleņķa trijstūri var sagriezt galīgā skaitā šaurleņķa trijstūru?
Atbildi pamatot.

27.40. Perpendikulāri plaknei krīt paralēlu staru kūlis. Jūsu rīcībā ir taisnstūra paralēlskaldnis, kura šķautņu garumi ir 3 cm, 4 cm un 5 cm. Atrast maksimālo ēnas laukumu, kādu var iegūt plāknē ar šo paralēlskaldni. Atbildi pamatot.