Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 29. OLIMPIĀDE

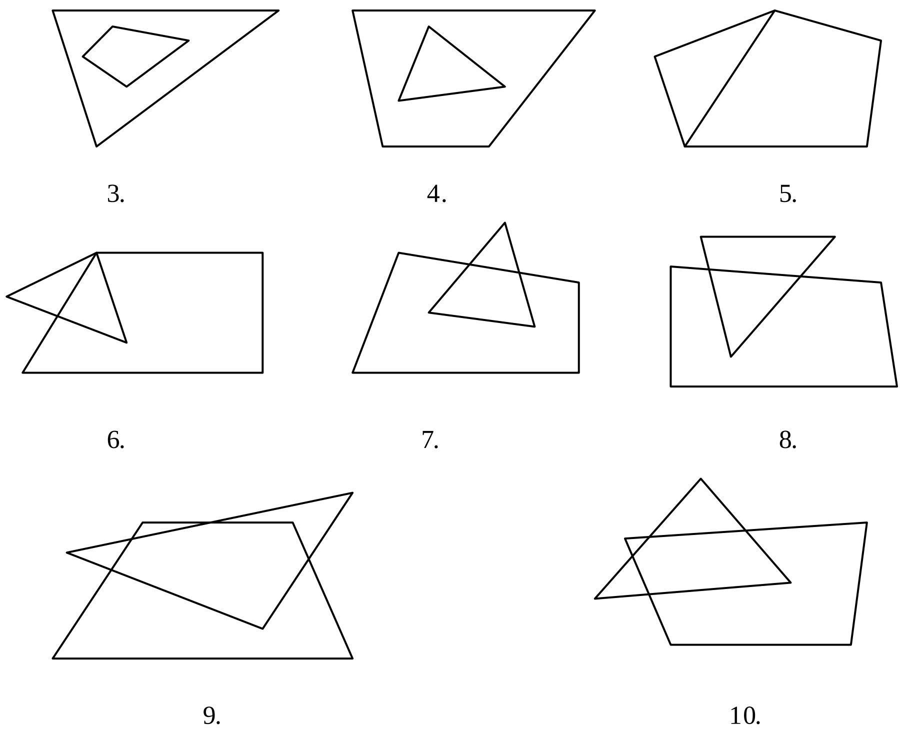
ATRSINĀJUMI

29.1. Šajā intervālā ir 9 viencipara skaitļi, 90 divciparu skaitļi (no 10 līdz 90), 900 trīsciparu skaitļi (no 100 līdz 999) un 980 četrciparu skaitļi (no 1000 līdz 1979). Tātad kopējais ciparu skaits ir

$$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 980 \cdot 4 = 6709 .$$

29.2. No dotā seko, ka skolēnu skaits klasē dalās ar 2, 3 un 7; tātad dalās ar $\text{MKD}(2, 3, 7) = 42$. Tā kā skolēnu skaits klasē ir mazāks par 50, tad tas ir vienāds ar 42. Tātad 21 skolēns saņēma atzīmi "5", 14 skolēni – atzīmi "4", 6 skolēni – atzīmi "3". Atlikušie $42 - 21 - 14 - 6 = 1$ skolēni (precīzāk, skolēns) saņēma atzīmi "2".

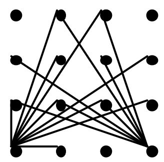
29.3. Atbilstošie zīmējumi parādīti 29.3. zīmējumā.



29.3. zīm.

Zem zīmējuma norādīts atbilstošā daudzstūra virsotņu skaits.

29.4. Kā novilkt 16 nogriežņus, parādīts 29.4. zīmējumā.



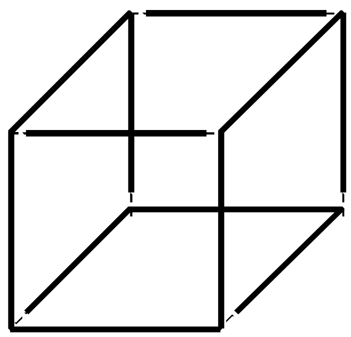
29.4.zīm.

17 šādus nogriežņus novilkt nevar. Divi virzieni ir horizontālais un vertikālais. Atliek novilkt 15 nogriežņus; tie ir divu tipu: "augoši" un "dilstoši". Ja novilkts "augošs" nogrieznis, tad to var paralēli pārbīdīt tā, ka tā viena virsotne nonāk kreisajā apakšējā stūrī (līdzīgi "dilstošos" nogriežņus var vilkt no labā apakšējā stūra). No 15 nogriežņiem būs vismaz 8 "augoši" vai 8 "dilstoši" nogriežņi, taču viegli pārbaudīt, ka no viena stūra var novilkt ne vairāk par 7 neparalēliem slīpiem nogriežņiem.

29.5. Stieples karkasu var izveidot mazākais no 4 stieples gabaliem.

No katras kuba virsotnes iziet 3 nogriežņi, tā kā 3 ir nepāra skaitlis, tad virsotnē jābūt vismaz vienam stieples galam. Tā kā kubam ir 8 virsotnes, tad jābūt vismaz 8 stiepļu galiem – tātad vismaz 4 stieplēm.

29.5. zīmējumā parādīts, kā kuba karkasu izveidot no 4 stieples gabaliem.



29.5.zīm.

29.6. Tāds piemēram ir skaitlis 2^{11}. Tā dalītāji ir skaitļi

$$1 = 2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3, \ldots,\ 2^{11}.$$

Kā redzams šā skaitļa dalītāju skaits ir 12.

29.7. Apzīmēsim skaitli 19791980 ar *n*. Uzdevums ir salīdzināt skaitļus $\frac{n-1}{n}$ un $\frac{n}{n+1}$.

No nevienādības

$$\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

seko, ka pirmais no uzrakstītajiem skaitļiem ir mazāks par otro.

29.8. Apzīmēsim vienas grāmatas cenu ar *x*.

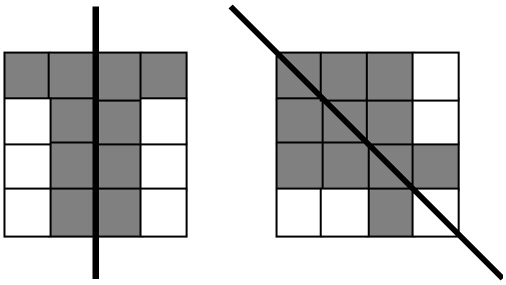
No uzdevuma pirmā nosacījuma seko, ka $9x>11 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{11}{9}$.

No uzdevuma otrā nosacījuma seko, ka $13x<16 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{16}{13}$.

Tātad $1,22<\frac{11}{9}<x<\frac{16}{13}<1{,}24$.

Ņemot vērā, ka *x* izsakās rubļos un kapeikās , skaitlim *x* aiz komata var būt tikai divi cipari.; tātad $x=1,23$, un 22 grāmatu kopēja cena ir 27 rubļi un 6 kapeikas (jo $1,23\cdot 22=27,06$).

29.9. To var izdarīt abos gadījumos (skat. 29.6. zīm.).



29.6. zīm.

29.10. Apzīmēsim ar *m* meiteņu skaitu klasē, bet ar *z* – zēnu skaitu klasē. No dotā iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases}(m-1)\cdot 6=z-2\\ m\cdot 5=z-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6m=z+4\\ 5m=z-1\end{cases}.$$

Atņemot no pirmā vienādojuma otro, iegūstam $m=5,\ z=26$.

29.11. Atbilde: $x=\frac{254}{111}$.

29.12. Tā kā visas 3 riņķa līnijas ir dažādas, tad katrai riņķa līnijai simetrijā ir jāattēlojas sevī. Tas nozīmē, ka simetrijas ass iet caur visu riņķa līniju centriem. Iespējami 3 gadījumi:

a) Visu riņķa līniju centri atrodas uz vienas taisnes, bet tie visi nesakrīt; tad šī taisne ir vienīgā figūras simetrijas ass.

b) Visu riņķa līniju centri neatrodas uz vienas taisnes; tad šai figūrai nav simetrijas ass.
c) Visu riņķu līniju centri sakrīt (tas ir punkts *O*); tad jebkura taisne, kas iet caur punktu *O*, ir figūras simetrijas ass.

29.13. Polinoma $P(x)$ visu koeficientu summa ir vienāda ar polinoma vērtību punktā $x=1$. Tātad mums jāaprēķina dotās izteiksmes vērtība, ja $x=1$. Viegli pārbaudīt, ka tā ir vienāda ar 1.

29.14. Pagriežot figūru *F* par $9°$ pulksteņa rādītāja kustības virzienā un pēc tam par $7°$ pretējā virzienā, secinām, ka, pagriežot figūru par $2°$, tā attēlojas pati sevī.
Pagriežot figūru *F* par $9°$ pulksteņa rādītāja kustības virzienā un pēc tam 4 reizes par $2°$ pretējā virzienā, secinām, ka, pagriežot figūru par $1°$, tā attēlojas pati sevī.

29.15. Ierakstot 7 vērtības, pārējās mainīgo vērtības var noskaidrot viennozīmīgi. Piemēram, mēs varam uzdot visas *x* vērtības un vienu *y* vērtību. Sastādot atbilstošu proporciju, tiks atrastas pārējās y vērtības.
Var pierādīt, ka ar mazāku skaitu uzdoto vērtību nepietiek, lai viennozīmīgi noteiktu pārējās vērtības. Tiešām, katrā kolonnā ir jāieraksta viens skaitlis; citādi šajā kolonnā ierakstīto skaitļu vērtības noteikt nevarēs. Tātad ierakstīti jau 6 skaitļi. Ja citi skaitļi nav ierakstīti, tad jebkurā brīvajā rūtiņā var ierakstīt patvaļīgu skaitli un pārējos noteikt izejot no proporcijām. Tātad pārējos 6 skaitļus var izvēlēties daudzos veidos.

29.16. Atbilde: $x\in(-3,3]$.

29.17. Apzīmēsim $x^2=y$; tad

$$y^4+2y^3+3y^2-6y=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$y\cdot\left(y^3+2y^2+3y-6\right)=0$$

Pārveidojam otro reizinātāju:

$$y^3+2y^2+3y-6=\left(y^3-y^2\right)+\left(3y^2-3y\right)+\left(6y-6\right)=$$
$$\left(y-1\right)\cdot\left(y^2+3y+6\right)$$

Tā kā vienādojumam y^2+3y+6 nav reālu sakņu, tad iegūstam $y=0,\ y=1$.

Atbilde: $x\in\{0,-1,1\}$.

29.18. Doto izteiksmi apzīmēsim ar *A*. Tad

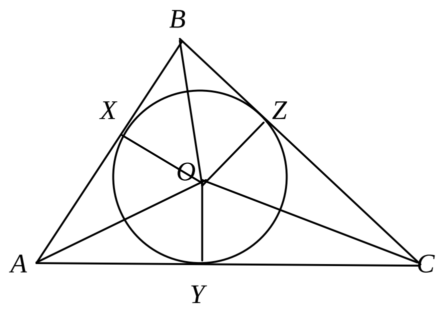
$$A=x+z+v+4(x-y)+2(z-u)\le 10+10+10+0+0=30\ .$$

Vērtību 30 var iegūt, ja $x=y=z=u=v=10$.

No otras puses

$A = 5x - y - u + 3(z - y) + (v - u) \geq 0 - 10 - 10 + 0 + 0 = -20$.

Vērtību -20 var iegūt, ja $x = 0,\ y = z = u = v = 10$.



29.7. zīm.

29.19. Skat. 29.7. zīmējumu.

Taisnleņķa trijstūri *OAX* un *OBX* ir vienādi, jo tiem ir vienādas abas katetes; tāpat vienādi ir trijstūri *OAY* un *OCY*.

Pieskares, kas vilktas no viena punkta ir vienādas; tātad $AX = AY$. No šejienes iegūstam, ka trijstūri *OAX* un *OAY* ir vienādi (vienādas abas katetes).

Tātad $AB = AX + XB = 2AX = 2AY = AY + YC = AC$.

Līdzīgi pierāda, ka $AB = BC$. Tātad visas trijstūra *ABC* malas ir vienādas.

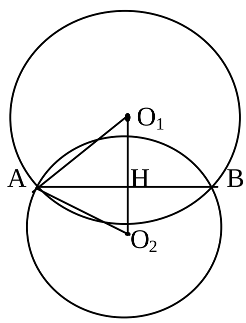
29.21. Ievietojot $y = 5 - x$ pirmajā vienādojumā, iegūstam

$$x^2 - x(5 - x) + (5 - x)^2 = 13 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 15x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4\ .$$

Atbilde: $\{(1,\ 4),\ (4,\ 1)\}$.



29.3. zīm.

29.22. Aplūkosim 29.3. zīm.

Doto riņķa līniju kopīga horda *AB* ir divas reizes garāka par *AH* – augstumu trijstūrī AO_1O_2 , kura malas ir 13, 14 un 15.

No Herona formulas seko, ka trijstūra AO_1O_2 laukums ir 84 (pārbaudiet to!). No šejienes $AH = \frac{2S}{O_1O_2} = \frac{168}{15} = 11{,}2$ un $AB = 22{,}4$.

29.23. Apzīmēsim meklējamo locekli ar *x*. Acīmredzot, *x* ir pirmais (mazākais) naturālais skaitlis, kuram izpildās nevienādība

$$1 + 2 + 3 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2} \geq 1979 .$$

Ievērojot, ka

$$\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953 < 1979 < 2016 = \frac{63 \cdot 64}{2} ,$$

iegūstam $x = 63$.

29.24. Viegli redzēt, ka skaitļi $x = 2$ un $y = 4$ apmierina dotās nevienādības, un attiecības $\frac{y}{x}$ vērtība ir 2. Pierādīsim, ka attiecība nevar būt lielāka.

Pieņemsim pretējo, ka $\frac{y}{x} > 2$. Iegūstam nevienādību sistēmu (pie kam *x* un *y* ir pozitīvi skaitļi.

$$\begin{cases} y > 2x \\ 4x - y \geq 4 \\ y - x \leq 2 . \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 2x \\ 4x \geq y + 4 \\ x \geq y - 2 . \end{cases}$$

Iegūstam no 1. un 3. nevienādībām:

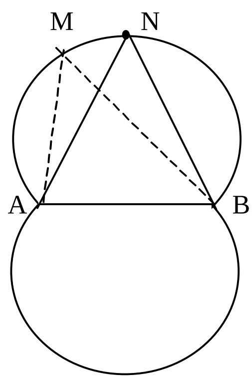
$$x \geq y - 2 > 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad x < 2 \qquad (1).$$

No 1. un 2. nevienādībām iegūstam:

$$4x \geq y + 4 > 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad x > 2 \qquad (2).$$

Taču nevienādības (1) un (2) ir pretrunīgas.

29.25. Nofiksēsim nogriezni *AB*, kas ir vienāds ar nogriezni *a*, un noskaidrosim, kā jānovieto leņķis, kas ir vienāds ar leņķi α lai viena tā mala ietu caur punktu *A*, bet otra – caur *B* un lai trijstūra laukums, ko nogrieznis *AB* atšķeļ no leņķa, būtu vislielākais iespējamais.



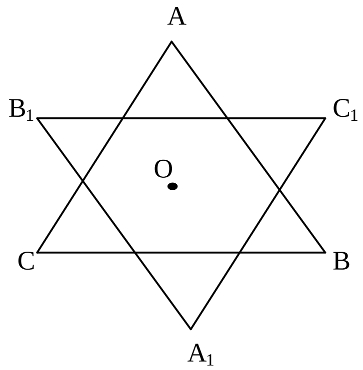
29.4. zīm.

No teorēmas par ievilktu leņķi seko, ka visu tādu leņķu virsotnes, kas vienādi ar fiksētu leņķi α un kam viena mala iet caur punktu *A*, bet otra – caur *B*, veido divus riņķa līnijas lokus, no kuru punktiem nogriezni *AB* redz leņķī α (skat. 29.4. zīm.).

Visiem atšķeltajiem trijstūriem ir kopīgs pamats *AB*; tātad lielākais laukums būs trijstūrim, kuram būs lielākais augstums pret malu *AB*. Viegli redzēt, ka tas būs vienādsānu trijstūra gadījumā, kuram *AB* ir pamats.

No šejienes izriet konstrukcijas gaita: vispirms konstruējam vienādsānu trijstūri ar pamatu *AB* un virsotnes leņķi α (aprakstiet šo konstrukciju). Pēc tam trijstūri *ANB* pārnesam uz prasītās konstrukcijas vietu, savienojot leņķi *ANB* ar doto leņķi α.

29.26. Viegli pierādīt, ka trijstūru kopīgā daļa ir regulārs sešstūris ar malas garumu $\frac{1}{3}$ (skat. 29.5. zīm.).



29.5. zīm.

Tas sastāv no 6 regulāriem rijstūriem, un tā laukums ir $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

29.27. a) Izpildot pārveidojumus, iegūstam

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{2+0+0}{1+0+0}=2.$$

b) Veiksim sekojošus pārveidojumus

$$|x_n-2|=\left|\frac{2n^2+n+1}{n^2+3n+1}-2\right|=\left|\frac{5n+1}{n^2+3n+1}\right|<\left|\frac{6n}{n^2}\right|=\frac{6}{n}.$$

Katram pozitīvam ε izvēlēsimies $\delta=\frac{6}{\varepsilon}$. Tad visiem $n>\delta=\frac{6}{\varepsilon}$ izpildās nevienādība

$$|x_n-2|<\frac{6}{n}<\varepsilon.$$

Pēc virknes robežas definīcijas pierādīts, ka virknes robeža ir 2.

29.28. a) Pieņemsim, ka $\lg 7=\frac{m}{n}$, kur m un n – naturāli skaitļi. Tad

$$10^{\frac{m}{n}}=7 \quad \Rightarrow \quad 10^m=7^n.$$

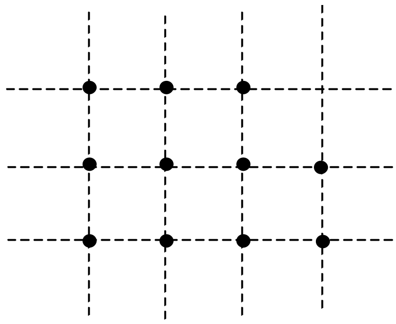
Acīmredzot, šāda vienādība nevar izpildīties, jo 7^n nedalās ar 10. Tātad $\lg 7$ ir iracionāls skaitlis.

c) $\sqrt{10}$ ir iracionāls skaitlis, kā tikko pieradīts, $2\lg 7$ arī ir iracionāls skaitlis. Bet

$$\sqrt{10}^{\,2\lg 7}=10^{\lg 7}=7$$

ir racionāls skaitlis.

29.29. Jā, var. Izvietosim šos 11 punktus vienā plaknē, kā parādīts 29.6. zīmējumā.



29.6. zīm.

Patstāvīgi norādiet visus prasītos projekciju virzienus.

29.30. Šādas funkcijas ir, piemēram,

$$f(x)=|x| \quad \text{un} \quad g(x)=-|x|.$$

Tad $f(x)+g(x)=0$ un $f(x)\cdot g(x)=-x^2$.

Iespējami daudzi citi funkciju piemēri.

29.31. Izpildot pārveidojumus, iegūstam

$$\mathrm{tg}15° = \mathrm{tg}(45° - 30°) = \frac{\mathrm{tg}45° - \mathrm{tg}30°}{1+\mathrm{tg}45° \cdot \mathrm{tg}30°} =$$

$$\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3} \approx 0{,}268 .$$

29.32. Tā kā

$$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x\left(1-4\sin^2 x\right),$$

tad no vienādības $\sin 36° = \cos 54°$ iegūstam

$$2\sin 18° \cos 18° = \cos 18°\left(1-4\sin^2 18°\right) \quad \Rightarrow$$

$$2\sin 18° = 1-4\sin^2 18° \quad \Rightarrow$$

$$4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\sin 18° = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4} .$$

Tā kā $\sin 18° > 0$, tad $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

39.33. Attālums starp šķērsām taisnēm ir īsākais attālums starp punktiem *x* un *y*, kur punkts *x* pieder vienai taisnei, bet *y* -- otrai. Apzīmēsim attālumu starp taisnēm t_1 un t_2 ar *d*. Uzskatīsim, ka $a \le b$. Tad

$$d \le a = \frac{a+a}{2} \le \frac{a+b}{2} .$$

39.34. Tā kā dotā taisne nav paralēla parabolas asij, tad tā pieskarsies parabolai tad un tikai tad, kad tai būs vienīgais kopīgais punkts ar parabolu. Tas būs tad, kad vienādojumam $ax-x^2 = 4-x$. Pārveidojam vienādojumu formā $x^2-(a+1)x+4=0$ un uzrakstām tā diskriminantu:

$$D = (a+1)^2 - 16 = 0$$

Vienādojuma saknes $a_1 = 3, a_2 = -5$ ir meklētās *a* vērtības.

39.35. Ja *n* ir naturāls skaitlis, tad

$$0 \le \left| f(0) - f(1) \right| =$$

$$\left| f(0) - f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(\tfrac{1}{n}\right) - f\left(\tfrac{2}{n}\right) + f\left(\tfrac{2}{n}\right) - f\left(\tfrac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\tfrac{n-1}{n}\right) - f(1) \right| \le$$

$$\left| f(0) - f\left(\tfrac{1}{n}\right) \right| + \left| f\left(\tfrac{1}{n}\right) - f\left(\tfrac{2}{n}\right) \right| + \left| f\left(\tfrac{2}{n}\right) - f\left(\tfrac{3}{n}\right) \right| + \cdots + \left| f\left(\tfrac{n-1}{n}\right) - f(1) \right| \le$$

$$\left|0-\tfrac{1}{n}\right|^2 + \left|\tfrac{1}{n}-\tfrac{2}{n}\right|^2 + \cdots + \left|\tfrac{n-1}{n}-1\right|^2 = n\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

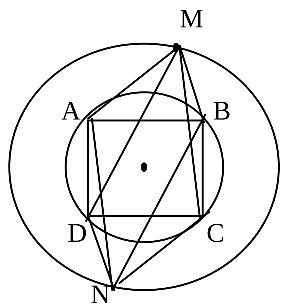
Tā kā nevienādības $0 \le \left| f(0) - f(1) \right| \le \frac{1}{n}$ ir spēkā visiem naturāliem *n*, un $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, tad $\left| f(0) - f(1) \right| = 0$, t.i., $f(0) = f(1)$.

39.36. Atbrīvojoties no logaritmiem iegūstam

$$x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = -5 .$$

Taču šīs saknes neder, nepieder vienādojuma definīcijas apgabalam.

39.37. Atzīmēsim punktu *N*, kas ir simetrisks punktam *M* attiecībā pret riņķa līniju kopīgo centru (skat. 29.7. zīm.).



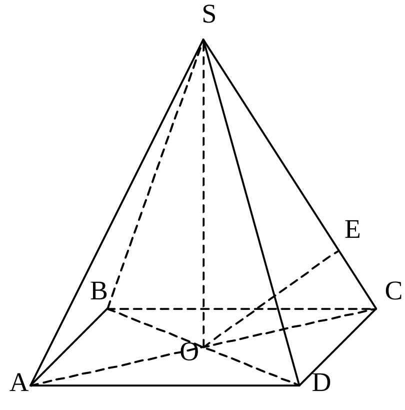
29.2. zīm.

Tad *MANC* un *NDMB* ir paralelogrami (jo tie ir četrstūri ar simetrijas centru). No teorēmas par paralelograma malu kvadrātu summu iegūstam:

$$\left(MA^2 + MC^2\right) + \left(MB^2 + MD^2\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(MN^2 + AC^2\right) + \frac{1}{2}\left(MN^2 + BD^2\right) = D^2 + d^2 .$$

kur *D* un *d* ir doto riņķa līniju diametru garumi.

29.38. Apzīmēsim piramīdas augstumu ar *c*, bet pamata malas garumu ar 2*x*. Plaknē *SOC* novilksim *OE* perpendikulāri *SC* (skat. 29.8. zīm.)



29.8. zīm.

Tad $OC = x\sqrt{2}$, $SC = \sqrt{y^2 + 2x^2}$.

Taisnleņķa trijstūrī *SOC* nogrieznis *OE* ir augstums, tātad

$$a = OE = \frac{OS \cdot OC}{SC} = \frac{x\sqrt{x} \cdot y}{\sqrt{2x^2 + y^2}} .$$

No šejienes iegūstam sakarību

$$\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \qquad (1).$$

Savienojot *S* un *O* ar *CD* viduspunktu *K*, iegūstam taisnleņķa trijstūri *SOK*, kura augstums pret hipotenūzu ir otrs dotais attālums *b*. No šejienes iegūstam sakarību

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{b^2} \qquad (2).$$

No sakarībām (1) un (2) iegūstam

$$\frac{1}{x^2} = 2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right), \quad \frac{1}{y^2} = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{b^2} .$$

Izmantojot piramīdas tilpuma formulu, iegūstam

$$V = \frac{2a^3b^3}{3\left(a^2 - b^2\right)\sqrt{2b^2 - a^2}} .$$

29.39. Pieņemsim, ka tādi skaitļi eksistē, un aplūkosim funkciju

$$f\left(x\right) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx .$$

Tā ir nepārtraukta funkcija un pozitīva visām *x* vērtībām. Tāpēc integrālis $\int_0^{2\pi} f\left(x\right)dx$ eksistē un ir pozitīvs , bet

$$\int_0^{2\pi} f\left(x\right)dz = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_0^{2\pi} \cos ix \cdot dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 0 = 0 .$$

Iegūta pretruna, tātad skaitļi, kādi bija prasīti uzdevuma nosacījumos, neeksistē.

29.40. Aplūkosim uzreiz vispārīgo gadījumu. Apzīmēsim spēlētāju, kas izdara pirmo gājienu ar *A*, bet viņa pretinieku ar *B*.

1. Pieņemsim, ka *n* nav divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju. Tad eksistē tāds naturāls skaitlis *k*, ka $2^k < n < 2^{k+1}$. Parādīsim, ka šajā gadījumā *A* var uzvarēt. Ar savu pirmo gājienu *A* paņem $\left(n - 2^k\right)$ sērkociņus, atstājot kaudzē 2^k sērkociņus.

Ievērosim, ka *B* tagad nevar paņemt visus sērkociņus, jo viņš nedrīkst ņemt vairāk sērkociņus, ka paņēma *A*. Ja *B* ņem pusi vai vairāk par atlikušajiem sērkociņiem, tad zaudē, jo nākošajā gājienā *A* drīkst paņemt visus atlikušos. Ja turpretī *B* ņem mazāk par 2^{k-1} sērkociņiem, tad *A* rīcībā nonāk kaudzīte ar n_1 sērkociņiem, kur $2^{k-1} < n_1 < 2^k$. Rīkojoties atkārtoti, kā pirmajā gājienā, *A* panāk uzvaru.

2. $n = 2^k$; šajā gadījumā var uzvarēt spēlētājs *B*, ja viņš spēlēs tā, kā *A* spēlēja pirmajā gadījumā.