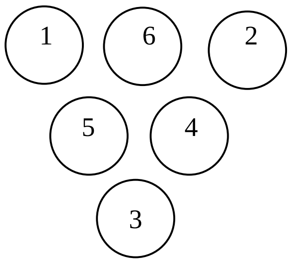
Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 30. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

30.1. To var izdarīt, piemēram, tā, ka parādīts 30.11. zīm.



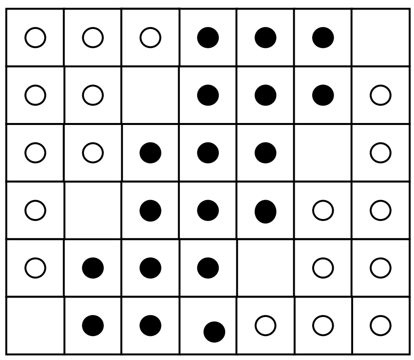
30.11. zīm.

30.2. Skat. 30.12. zīm.

1	7	3	1	7	3	1	7	3	1	7	3	1	7	3

30.12. zīm.

30.3. Izgriežot atbilstošās izklātnes no papīra, varam pārbaudīt, ka kuba virsmu var iegūt no 1. un 4. figūras.



30.13. zīm.

30.4. Ar 5 gājieniem to var izdarīt tā, kā parādīts 30.13.zīm.

Ar 4 gājieniem to izdarīt nevar. Tiešām, ievērosim, ka visas trīs baltās figūras atrodas lauciņos, kuros beigu stāvoklī tās neatradīsies.; tātad katra no trim baltajām figūrām izpildīs vismaz vienu gājienu. Arī divas melnās figūras (labējās) atrodas lauciņos, kuros beigu stāvoklī tās neatradīsies.; tātad katra no divām melnajām figūrām izpildīs vismaz vienu gājienu. Kopā tiks izdarīti vismaz 5 gājieni.

*4	*3	*2	*1

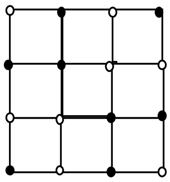
30.14. zīm.

30.5. Iedomāsimies, ka monētas sakārtotas četros pēc kārtas ņemtos lauciņos (skat. 30.14. zīm.).
Tad pirmajā lauciņā var ievietot jebkuru no 4 monētām; otrajā – jebkuru no 3 atlikušajām; trešajā -- jebkuru no 2 atlikušajām; ceturtajā – pēdējo atlikušo.
Tātad pavisam ir $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ veidi, kāto izdarīt.

30.6. Gadā var būt 366 dienas. Ievērosim, ka $366 = 7 \cdot 52 + 2$. Ja gada pirmā diena ir svētdiena, tad gadā būs 53 svētdienas, vairāk svētdienu būt nevar.

30.7. To var izdarīt. Vispirms, izmantojot 5 l trauku (sauksim to par *B*), salejam 17-litrīgaja traukā (traukā *A*) 15 l ūdens un piepildām trauku *B*. Tad no trauka *B* pielejam pilnu trauku *A*, tad traukā *A* būs 17 l ūdens, bet traukā *B* – 3 l ūdens. Trauka *A* saturu izlejam mucā, bet no trauka *B* 3 l ūdens pārlejam traukā *A*. Pēc tam, izmantojot trauku *B*, pielejam traukā *A* vēl 10 l ūdeni. Rezultātā traukā *A* būs 13 l ūdens.

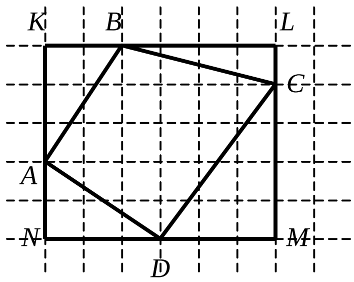
30.8. Apzīmēsim doto skaitli ar $\overline{abc}$, $a > b > c$.
Ja $b - c \geq 3$, tad $a - c = (a - b) + (b - c) = 4(b - c) \geq 12$, kas nav iespējams. Atliek divas iespējas:
1) $b - c = 2$, tad iegūstam skaitļus 820 un 931. Der tikai skaitlis 820, jo dotā skaitļa ciparu summai jābūt pāra skaitlim.
2) $b - c = 1$; tad iegūstam skaitļus 410, 521, 632, 743, 854, 965. Der tikai skaitļi 521, 743 un 965.



30.15. zīm.

30.9. Ja iekrāsosim kvadrātu virsotnes tā, kā parādīts 30.15. zīmējumā, tad uzdevuma pirmā punkta nosacījumi izpildīsies.

Otrajā gadījumā uzdevumu izpildīt nevar. Ja baltā krāsā nokrāsotas 7 virsotnes, tad melnā krasā nokrāsotas 9 virsotnes. Tā kā virsotnes atrodas 4 rindiņās, tad kādā no horizontālajām rindiņām atradīsies vismaz 3 melnas virsotnes, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.



30.16. zīm.

30.10. Lai aprēķinātu dotā četrstūra laukumu, ievietosim to taisnstūrī $KLMN$ (skat. 30.16. zīm.).

Tad

$$S_{ABCD} = S_{KLMN} - S_{AKB} - S_{BLC} - S_{CMD} - S_{DNA} =$$
$$30 - \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} = 16 .$$

Tātad varam uzzīmēt taisnstūrus $1 \times 16,\ 2 \times 8,\ 4 \times 4$.

30.11. Ja skaitlis $n-1$ dalās ar katru no skaitļiem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, tad skaitlis n nedalās ne ar vienu no šiem skaitļiem. Skaitli $n-1$ var izvēlēties kā norādīto skaitļu mazāko kopīgo dalāmo (protams, var ņemt arī doto skaitļu reizinājumu).

$$\text{MKD}(2,3,4,5,6,7,8,9,10) = 2^3 \cdot 3^2 .5 \cdot 7 = 2520 .$$

Tātad der skaitlis $n = 2521$.

30.12. Tā kā *B* ar *E* spēlēja neizšķirti, tad, lai savāktu 6 punktus, *B* ar *A* spēlēja neizšķirti (vinnēt *A* nevar), pārējās komandas *B* uzvarēja. Tā kā *E* savāca 1 punktu un ar *B* spēlēja neizšķirti, tad pārējām komandām tā zaudēja. Iegūstam šādu turnīra tabulu (30.17. zīm.).

	A	B	C	D	E
A	*	1			2
B	1	*	2	2	1
C		0	*		2
D		0		*	2
E	0	1	0	0	*

30.17. zīm.

Ņemot vērā, ka *D* ieguva 2 punktus, *D* audēja gan *A*, gan *C*. No šejienes seko arī pēdējās spēles rezultāts: *A* ar *C* spēlēja neizšķirti.

30.13. Jā to var izdarīt. No sākuma kubu $3\times3\times3$ sagriezīsim 27 kubiņos $1\times1\times1$. Pēc tam 8 mazos kubiņus, kas atrodas pie viena lielā kuba stūra apvienosim vienā kubā $2\times2\times2$. Kopējais kubu skaits samazināsies par 7 un kļūs vienāds ar 20.

30.14. Tā kā

$$4a_3 \le a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \le a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1,$$

tad $a_3 \le \frac{1}{4}$.

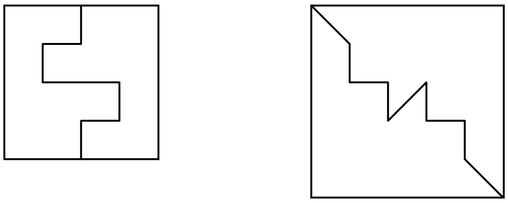
Vērtību $\frac{1}{4}$ iegūstam, ņemot $a_1 = a_2 = 0$ un $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = \frac{1}{4}$.

30.15. Ja lielākais disks neatrodas apakšā, tad ar divām operācijām to var novietot kaudzes apakšā. Tiešām, pirmajā operācijā pārgriežam disku kaudzi , kuras apakšējais disks ir lielākais; tad lielākais disks nonāks kaudzes augšpusē. Otrajā operācijā pārgriežam visus kaudzes diskus; acīmredzot, lielākais nonāks kaudzes apakšā.

Vairāk pirmo lielāko disku neizmantosim un aplūkosim lielāko no atlikušajiem diskiem. Ar nākošajām divām operācijām novietosim to tieši virs pirmā lielākā diska un to vairs neizmantosim.

Atkārtojot šo metodi, visi diski tiks sakārtoti pareizā secībā.

30.16. To var izdarīt abos gadījumos. Piemēri parādīti 30.18. zīmējumā.



30.18. zīm.

30.17. Tā kā 1 un 2 ir dotā vienādojuma saknes, tad, ievietojot tos vienādojumā, iegūstam patiesas vienādības:

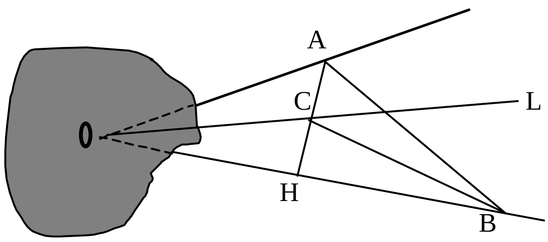
$$\begin{cases} 3+3a=0 \\ 3\cdot 4+6a+b=0\,. \end{cases}$$

Atrisinot vienādojumu sistēmu iegūstam $a=-1, b=-6$.

30.18. Ja a, b un c ir tādi 3 veseli pozitīvi skaitļi, kas summā dod 40, tad $a-1$, $b-1$ un $c-1$ ir tādi 3 nenegatīvi veseli skaitļi, kas summā dod 37.

Rindā uzrakstīsim 37 punktus un atdalīsim tos ar 2 šķērssvītrām. Sadalījums ar šķērssvītrām norāda, kā skaitlis 37 sadalīts 3 nenegatīvos saskaitāmajos. Kopā 37 punkti un 2 šķērssvītras ir 39 objekti, no kuriem ir jāizvēlas divi (jānorāda šķērssienas). To var izdarīt $\frac{39\cdot 38}{2}=741$ veidos.

30.19. Jā, tāds, piemēram, ir skaitlis 66999. Tiešām, skaitļi $6+6+9+9+9=39$ un $6+7+0+0+0=13$ dalās ar 13.



30.19. zīm.

30.20. Skat. 30.19. zīm.

Novelkam perpendikulu AH pret staru OB.

Konstruējam *AB* simetrisku *AO* pret taisni *AH*.

Konstruējam leņķa *ABH* bisektrisi *BC*.

Konstruējam taisni *CL*, kas ir simetriska taisnei *CB* attiecībā pret taisni *AH*.

No simetrijas seko, ka *CL* ir leņķa *AOH* bisektrise.

30. 21. Apzīmēsim dotos skaitļus ar x un $x+1$. Tad

$$(x+1)^2 - x^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+1=5 \quad \Leftrightarrow \quad x=2.$$

Atbilde: meklējamie skaitļi ir 2 un 3.

30.22. Katru reālu skaitli x var izteikt formā $x=n+a$, kur n ir vesels skaitlis, bet $a \in [0,1)$. Aplūkosim divus gadījumus:

1) $a \in [0, \frac{1}{2})$; tad $[x]+[x+\frac{1}{2}] = n+n = 2n$, un arī $[2x]=[2n+2a]=2n$;

2) $a \in [\frac{1}{2}, 1)$; tad $[x]+[x+\frac{1}{2}] = n+(n+1) = 2n+1$, un arī $[2x]=[2n+2a]=2n+1$, jo $1 \le 2a < 2$.

Redzam, ka visos gadījumos prasītā vienādība izpildās.

30.23. Uzskatīsim, ka $a \le b \le c$; tad $abc = a+b+c \le 3c \quad \Rightarrow \quad ab \le 3$. Iespējami 3 gadījumi:

1) $a=b=1$; tad $2+c=c \quad \Rightarrow \quad 2=0$; pretruna.

2) $a=1, b=2$; tad $3+c=2c \quad \Rightarrow \quad c=3$.

3) $a=1, b=3$; tad $4+c=3c \quad \Rightarrow \quad c=2$; pretruna, jo $b>c$.

Tātad faktiski ir 6 šādi skaitļu trijnieki, kuros patvaļīgā secībā ierakstīti skaitļi 1, 2, 3.

30.24. Abos gadījumos šādus skaitļus var atrast.

Pirmajā gadījumā izvēlamies skaitļus 2, 3 un 6; tad apgalvojums seko no vienādības

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

Lai atrastu skaitļus otrajam variantam, atzīmēsim vienādību

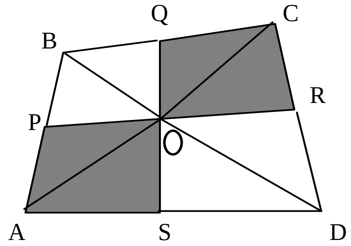
$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Iegūstam

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{42\cdot 43}.$$

Tātad varam izvēlētie skaitļus 2, 3, 7, 43, $42\cdot 43$.

30.25. Skat 30.20. zīmējumu.



30.20. zīm.

Trijstūriem, kuru pamati ir vienādi un augstumi ir vienādi, ir vienādi laukumi. No šī apgalvojuma seko, ka

$$S_{AOS} = S_{DOS}, \quad S_{COR} = S_{ROD}, \quad S_{COQ} = S_{BOQ}, \quad S_{AOP} = S_{BOP}.$$

Summējot šīs vienādības, iegūstam, ka iekrāsoto laukumu summa ir vienāda ar neiekrāsoto laukumu summu, no šejienes seko prasītais.

30.21.* Vienādības kreiso pusi pārveidojam

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} =$$

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b \cdot a}{(bc+b+1) \cdot a} + \frac{c \cdot ab}{(ca+c+1) \cdot ab} =$$

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{1}{a+1+ab} =$$

$$\frac{a+ab+1}{ab+a+1} = 1.$$

30.22.* No uzdevuma nosacījumiem seko, ka $a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20} = 0$. Tātad

$$5 \cdot (a_{11} + a_{20}) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{11} + a_{20} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$a_1 + a_{30} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{30} = 15 \cdot (a_1 + a_{30}) = 0.$$

30.23.* No dotā seko, ka $a < c$ un $b < c$; tātad arī $\sqrt{a} < \sqrt{c}$ un $\sqrt{b} < \sqrt{c}$. No šejienes iegūstam nevienādību

$$a^2 + b^2 = a\sqrt{a}\sqrt{a} + b\sqrt{b}\sqrt{b} < a\sqrt{a}\sqrt{c} + b\sqrt{b}\sqrt{c} =$$

$$\left(a\sqrt{a} + b\sqrt{b}\right)\sqrt{c} = c\sqrt{c}\sqrt{c} = c^2.$$

No šīs nevienādības seko, ka aplūkojamais trijstūris ir platleņķa trijstūris.

30.24.* Pārveidojam doto vienādojumu šādi:

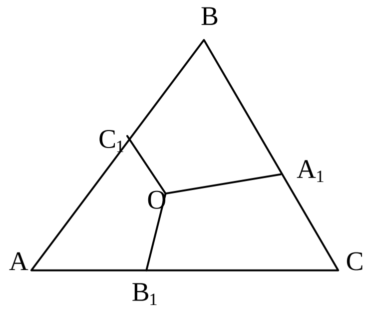
$$2^n + 1 = m^3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^n = m^3 - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$2^n = (m-1) \cdot \left(m^2 + m + 1\right).$$

Tā kā m^2+m+1 ir 2^n dalītājs, tad m^2+m+1 pats ir divnieka pakāpe, un tā kā $m^2+m+1>1$, tad tam jābūt pāra skaitlim, taču, acīmredzami, m^2+m+1 ir nepāra skaitlis.

Iegūta pretruna, kas norāda, ka prasītie skaitļi neeksistē.

30.25.* Ar O apzīmēsim riņķa līniju, kas apvilktas ap trijstūriem AC_1B_1 un CA_1B_1 (skat. 30.2. zīm.).



30.2. zīm.

No teorēmas par ievilktā četrstūra leņķiem iegūstam

$$\angle C_1OA_1 = 360° - \angle C_1OB_1 - \angle B_1OA_1 =$$
$$360° - (180° - \angle A_1CB_1) - (180° - \angle B_1AC_1) =$$
$$\angle A_1CB_1 + \angle B_1AC_1 = 180° - \angle C_1BA_1.$$

Tātad ap četrstūri C_1BA_1O var apvilkt riņķa līniju. Tas nozīmē, ka visas norādītās riņķa līnijas krustojas vienā punktā O.

30.26. a) Izpildot pārveidojumus, iegūstam

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^2+3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} =$$
$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+0+0}{1+0+0} = 2\,.$$

b) Veiksim sekojošus pārveidojumus

$$|x_n - 2| = \left|\frac{2n^2+n+1}{n^2+3n+1} - 2\right| = \left|\frac{5n+1}{n^2+3n+1}\right| < \left|\frac{6n}{n^2}\right| = \frac{6}{n}\,.$$

Katram pozitīvam ε izvēlēsimies $\delta = \frac{6}{\varepsilon}$. Tad visiem $n > \delta = \frac{6}{\varepsilon}$ izpildās nevienādība

$$|x_n - 2| < \frac{6}{n} < \varepsilon\,.$$

Pēc virknes robežas definīcijas pierādīts, ka virknes robeža ir 2.

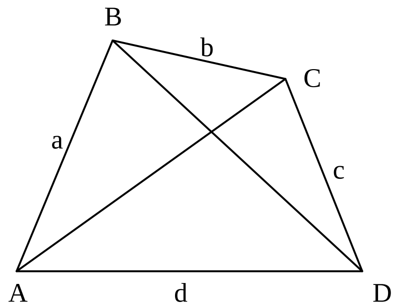
30.27. Izmantojot funkciju reizinājuma atvasinājuma formulas, iegūstam:

$$f'(x)=\left((x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right)' =$$
$$(x-1)'(x-2)^2(x-3)^3+(x-1)\left((x-2)^2\right)'(x-3)^3+(x-1)(x-2)^2\left((x-3)^3\right)' =$$
$$(x-2)^2(x-3)^3+(x-1)2(x-2)(x-3)^3+(x-1)(x-2)^2 3(x-3)^2.$$

Tāpēc $f'(1)=-2$, $f'(2)=f'(3)=0$.

30.28. Trijstūra laukumu var aprēķināt pēc formulas

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma\le\frac{1}{2}ab.$$



30.3. zīm

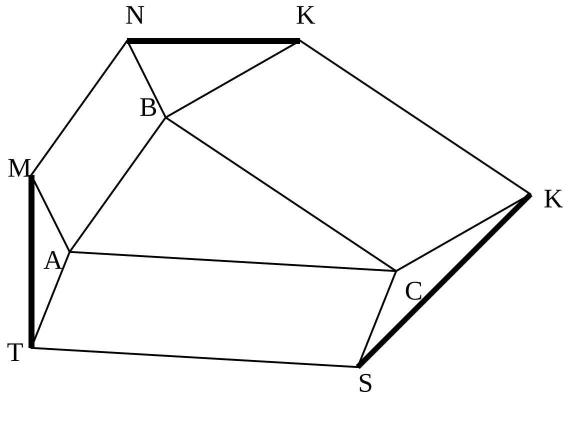
Aplūkosim doto četrstūri *ABCD* (skat 30.3. zīm.).

Tad $S=S_{ABC}+S_{CDA}\le\frac{1}{2}(ab+cd)$ un $S=S_{BCD}+S_{DAB}\le\frac{1}{2}(bc+ad)$.

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam, ka

$$2S\le\frac{1}{2}(ab+cd+bc+ad)=\frac{1}{2}(a+c)(b+d).$$

no kurienes seko prasītais.



30.4. zīm.

30.29. Skat. 30.4. zīmējumu.

Aplūkosim vienādības

$$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BN},$$
$$\overrightarrow{LS} = \overrightarrow{CS} - \overrightarrow{CL},$$
$$\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AT}.$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam

$$\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{LS} + \overrightarrow{TM} = \left(\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CL}\right) + \left(\overrightarrow{CS} - \overrightarrow{AT}\right) + \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BN}\right) = 0.$$

No, šejienes izmantojot trijstūru nevienādību, iegūstam prasīto:

$$NK = \left|\overrightarrow{LS} + \overrightarrow{TM}\right| \le \left|\overrightarrow{LS}\right| + \left|\overrightarrow{TM}\right| = LS + TM.$$

30.30. Pierādīsim, ka skaitļa α ciparu virkne nav periodiska, no tā sekos, ka α ir iracionāls skaitlis.

Pieņemsim pretējo, ka tā ir periodiska ar periodu T. Acīmredzot periods nesastāv tikai no nullēm. Taču dotajā virknē atradīsies skaitlis $1\underbrace{000\ldots0}_{2T}2$. Vidējais fragments no nullēm noteikti saturēs kādu pilnu periodu – tātad tam būtu jāsastāv tikai no nullēm, bet tā ir pretruna.

30.31. Izpildot pārveidojumus, iegūstam

$$\operatorname{tg}15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}30^\circ}{1 + \operatorname{tg}45^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ} =$$
$$\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268.$$

30.32. Pārveidojam vienādības kreisās puses izteiksmi

$$\sin^2(\alpha - 30^\circ) + \sin^2(\alpha + 30^\circ) - \sin\alpha =$$
$$\frac{1 - \cos(2\alpha - 60^\circ)}{2} + \frac{1 - \cos(2\alpha + 60^\circ)}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} =$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos(2\alpha - 60^\circ) + \cos(2\alpha + 60^\circ)\right) + \frac{\cos 2\alpha}{2} =$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 60^\circ + \frac{\cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Prasītais pierādīts.

30.33. Ievedīsim telpā koordinātu sistēmu, kurā plakne Q būs koordinātu plakne Oyz. Tad attālumi no paralelograma virsotnēm līdz plaknei Q būs vienādi ar $|A_x|$, $|B_x|$, $|C_x|$ un $|D_x|$.

Paralelograma viduspunktu apzīmēsim ar O. Tā kā O ir nogriežņu AC un BD viduspunkts, tad iegūstam vienādības

$$O_x = \frac{1}{2}(A_x + C_x) = \frac{1}{2}(B_x + D_x).$$

Tālāk jāaplūko vairāki gadījumi, atkarībā no tā, kāds punkts kādā attālumā atrodas no plaknes Q, un no tā kādā pusē no plaknes dotie punkti atrodas. Aplūkosim tikai vienu no šiem gadījumiem (pārējie ir analoģiski).

Pieņemsim, ka $A_x = 3,\ B_x = 4,\ C_x = 5$; tad

$$D_x = A_x + C_x - B_x = 3 + 5 - 4 = 4.$$

Atbilde: iespējamie attālumi ir šādi: 2, 4, 6, 12.

30.34. Pierādāmo nevienādību pārveidojam formā

$$\left|\frac{a^2c + b^2a + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b}{abc}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| < abc.$$

Pēdējā nevienādība seko no trīs trijstūra nevienādībām (tās ir jāsareizina):

$$|a-b| < c\ ,\ |b-c| < a\ ,\ |c-a| < b\ .$$

30.35. Jebkuriem naturāliem skaitļiem x un y izpildās īpašība

$$x \cdot y = \text{LKD}(x,\ y) \cdot \text{MKD}(x,\ y).$$

Izmantojot šo īpašību, no dotā iegūstam

$$\begin{cases} (uv)^2 = 3600 \\ u + v = 32 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} uv = 60 \\ u + v = 32 \end{cases} \Rightarrow \quad u = 2,\ v = 30.$$

($u = 30,\ v = 2$ neder, jo $\text{LKD}(x,\ y) = u \le \text{MKD}(x,\ y) = v$).

Tātad abi skaitļi x un y ir skaitļa 30 dalītāji, un tie abi ir pāra skaitļi. Tātad x var pieņemt vērtības 2, 6, 10, 30. Tām atbilst četri atrisinājumu pāri

Atbilde: $\{(2,\ 30), (6, 10), (10,\ 6), (30,\ 2)\}$.

30.36. Pie $x > 0$ dotā nevienādība ekvivalenta šādai:

$$\frac{x + a}{\sqrt{10}} > \sqrt{2x}\ .$$

Ja $a<0$, tad nevienādība neizpildās skaitlim $x=-\frac{a}{2}$. Tātad aplūkosim tikai pozitīvās a vērtības. Šajā gadījumā, kāpinot nevienādību kvadrātā, mēs iegūstam ekvivalentu nevienādību

$$(x+a)^2>20x \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2(a-10)\cdot x+a^2>0\,.$$

Aprēķināsim šī kvadrāttrinoma diskriminantu:

$$\frac{D}{4}=(a-10)^2-a \quad =-20a+100.$$

Ja $a>5$, tad $D<0$, kvadrātvienādojumam nav sakņu, un prasītā nevienādība izpildās visiem (pozitīviem) x. Viegli pārbaudīt, ka der arī a vērtība 5.

Skaitļa a vērtības, kas mazākas par 5, neder. Tiešām, izvēlēsimies $x=10-a$; tad

$$x^2+2(a-10)x+a^2=(10-a)^2+2(a-10)(10-a)+a^2$$
$$=a^2-(a-10)^2<0\,,$$

jo no tā, ka $0<a<5$, seko, ka $|a|<|10-a|$, un tātad arī nevienādība

$$a^2-(a-10)^2<0$$

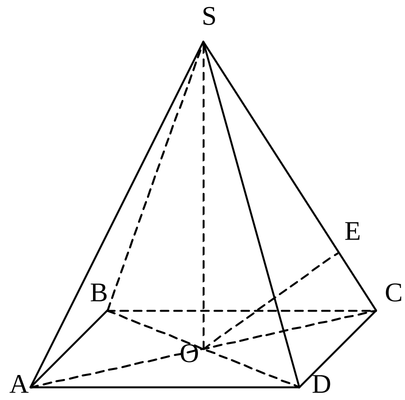
Redzam, ka prasītā vienādība visiem pozitīviem x neizpildās. Tātad der tikai parametra a vērtības, kas ir lielākas par 5.

30.37. Pirmās iekavas vērtība atrodas starp 0 un 2; otrās iekavas vērtība atrodas starp (-1) un 3. Tāpēc vienādība var pastāvēt tad un tikai tad, ja

$$\begin{cases}\sin(x+y)=1\\ \sin(2x-y)=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ 2x-y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\,.\end{cases}$$

Atbilde: $\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi(n+k)}{3}\\ y=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi(2n-k)}{3}\end{cases} \quad n,k\in Z.$



30.5. zīm.

30.38. Apzīmēsim piramīdas augstumu ar c, bet pamata malas garumu ar $2x$. Plaknē SOC novilksim OE perpendikulāri SC (skat. 30.5. zīm.)
Tad $OC = x\sqrt{2}$, $SC = \sqrt{y^2 + 2x^2}$.

Taisnleņķa trijstūrī SOC nogrieznis OE ir augstums, tātad

$$a = OE = \frac{OS \cdot OC}{SC} = \frac{x\sqrt{x} \cdot y}{\sqrt{2x^2 + y^2}}.$$

No šejienes iegūstam sakarību

$$\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \qquad (1).$$

Savienojot S un O ar CD viduspunktu K, iegūstam taisnleņķa trijstūri SOK, kura augstums pret hipotenūzu ir otrs dotais attālums b. No šejienes iegūstam sakarību

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{b^2} \qquad (2).$$

No sakarībām (1) un (2) iegūstam

$$\frac{1}{x^2} = 2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right), \quad \frac{1}{y^2} = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{b^2}.$$

Izmantojot piramīdas tilpuma formulu, iegūstam

$$V = \frac{2a^3b^3}{3(a^2 - b^2)\sqrt{2b^2 - a^2}}.$$

30.39. Novilksim riņķa līnijas plaknē divas savstarpēji perpendikulāras taisnes, kas nav paralēlas nevienam no apskatāmajiem nogriežņiem. Projicēsim visus nogriežņus uz šīm taisnēm. Tā kā taisnleņķa trijstūrī katešu garumu summa pārsniedz hipotenuzas garumu, tad visu projekciju summa pārsniedz 32. Tāpēc vismaz viena no virzieniem projekciju garumu summa ir lielāka par 16. Visas šīs projekcijas atrodas nogrieznī ar garumu 2 (dotā riņķa projekcijā), tāpēc vismaz vienu punktu pārklāj vismaz 9 projekcijas. Taisne, kas iet caur šo punktu perpendikulāri projekcijas taisnei, krusto vismaz 9 dotos nogriežņus.

30.40. A. Pierādīsim, ka $M \le 2^n - 1$. Līdzsvarojot kādu smagumu, jebkuru no atsvariem var vai nu uzlikt, vai neuzlikt uz atsvaru kausa, tāpēc to izdarīt iespējams 2^n dažādos veidos. No tiem vienā gadījumā (kad nav uzlikts neviens atsvars) nevar līdzsvarot nekādu priekšmetu. Tātad ar *n* atsvariem var līdzsvarot ne vairāk kā $2^n - 1$ dažādus svarus, tātad $M \le 2^n - 1$.

B. Aplūkosim svaru komplektu 1 kg, 2 kg, 4 kg, ... , 2^{n-1} kg . Ar matemātisko indukciju viegli pierādīt, ka ar šo komplektu var līdzsvarot jebkuru veselu skaitu kilogramu no 1 kg līdz $2^n - 1$ kg.