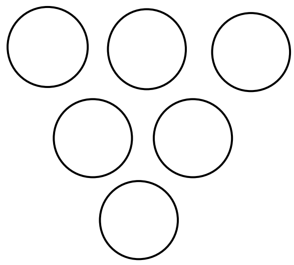
Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 30. OLIMPIĀDE

3. klase

30.1. Ierakstīt aplīšos veselos skaitļus no 1 līdz 6 (katrā aplītī – citu skaitli) tā, lai katros trijos aplīšos, kas atrodas uz vienas taisnes, ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati (skat. 30.1. zīm.).



30.1. zīm.

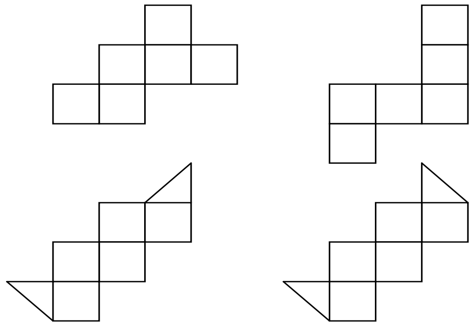
30.2. Aplūkosim 30.2. zīm.

			7							3				

30.2. zīm.

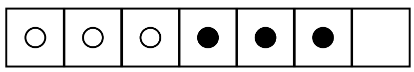
Ierakstīt katrā tukšajā rūtiņā pa skaitlim tā, lai katrās trijās blakus esošajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa būtu 11.

30.3. Kuras no 30. 3. zīmējumā attēlotajām četrām figūrām salokot, var iegūt kuba virsmu? Kuba šķautnes garums vienāds ar kvadrātiņa malas garumu.



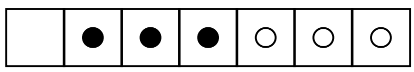
30.3. zīm.

30.4. Sešas figūriņas novietotas tā, kā parādīts 30.4. zīmējumā



30.4. zīm.

Ar vienu gājienu var vienu figūriņu rbīdīt uz blakus rūtiņu, ja tā ir tukša, vai arī pārcelt pāri vienai, divām vai trim gūriņām, ja rūtiņa, uz kuru to pārceļ, ir tukša. Jāiegūst stāvoklis, kad tukša rūtiņa ir pa kreisi, aiz tās seko 3 melnās figūriņas (vienalga kādā kārtībā) bet aiz tām 3 baltās figūriņas (vienalga kādā kārtībā) (skat. 30.5. zīm.).



30.5. zīm.

Pierādiet, ka to var izdarīt, izmantojot 5 gājienus. Vai to var izdarīt, izmantojot tikai 4 gājienus.

30.5. Uz galda rindā jānovieto pieckapeika, trīskapeika, divkapeika un vienkapeika. Cik dažādos veidos to var izdarīt?

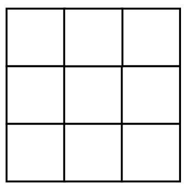
4. klase

30.6. Kāds ir vislielākais iespējamais svētdienu skaits gadā?

30.7. Dota muca, kurā ir 100*l* ūdens, un divi tukši trauki ar tilpumiem 17*l* un 5*l*; traukiem nav nekādu iedaļu. Vai lielākajā traukā var ieliet tieši 13*l* no mucas, izmantojot tikai abus dotos traukus?

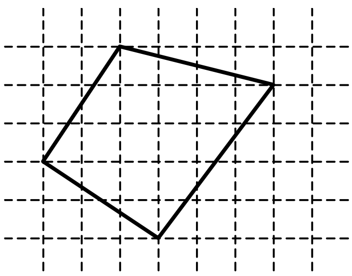
30.8. Atrast visus trīsciparu skaitļus ar dažādiem cipariem (pirmais cipars ir vislielākais, pēdējais – vismazākais) , kuru ciparu summa ir pāra skaitlis, ja starpība starp pirmo un otro ciparu jābūt 3 reizes lielākai par starpību starp otro un trešu ciparu.

30.9. No 9 vienādiem kvadrātiņiem izveidots viens liels kvadrāts (skat. 30.6. zīm).



30.6. zīm.

Katra no mazo kvadrātiņu 16 virsotnēm jānokrāso melnā vai baltā krāsā tā, lai nekādas trīs vienā krāsā nokrāsotas virsotnes neatrastos uz vienas taisnes.
Vai to var izdarīt?
Vai to var izdarīt, ja baltā krāsā jānokrāso tieši 7 virsotnes?



30.7. zīm.

30.10. Apskatīsim 30.7. zīmējumu.Vienas rūtiņas nokrāsošanai jāizmanto1 g krāsas. Uzzīmēt visus dažādos taisnstūrus, kuru malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru nokrāsošanai jāizmanto tikpat daudz krāsas, cik četrstūra *ABCD* nokrāsošanai.

5. klase

30.11. Atrast kaut vienu veselu skaitli n, kas apmierina divas šādas īpašības :

a) n nedalās ne ar vienu no skaitļiem

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;

b) $n-1$ dalās ar katru no skaitļiem

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

30.12. Futbola turnīrā piedalījās 5 komandas: A, B, C, D, E. Katra ar katru spēlēja vienu spēli. Par uzvaru komanda saņēma 2 punktus, par neizšķirtu 1 punktu, par zaudējumu 0 punktus. A nezaudēja nevienu spēli, bet B un E savā starpā spēlēja neizšķirti. Turnīru beidzot, A un B bija pa 6 punktiem, C – 5 punkti, E – 1 punkts. Noskaidrot, kā beidzās visas turnīra spēles.

30.13. Vai kubu var sagriezt 20 mazākos kubiņos (daži no tiem var būt vienādi, daži atšķirīgi) ?

30.14. Dots, ka $0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6$ un

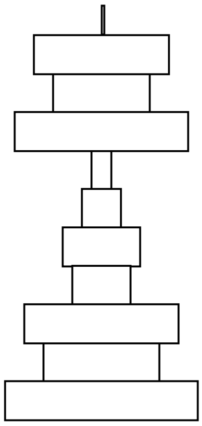
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1.$$

Kāda var būt lielākā iespējamā a_3 vērtība ?

30.15. Uz vertikāla stabiņa uzmaukti 10 dažāda izmēra diski (kā piemēru skat. 30.8. zīm., taču jāuzskata, ka izvietojums ir patvaļīgs).

Atļauts jebkuru daudzumu augšējo disku (varbūt visus) noņemt no stabiņa, apgriezt šo noņemto kaudzīti otrādi un uzmaukt atpakaļ uz stabiņa.

Pierādīt, ka atkārtojot šādu operāciju vairākas reizes, var panākt, lai diski uz stabiņa būtu sakārtoti izmēru pieaugšanas kārtībā (apakšā vislielākais, tālāk otrais lielākais utt.).



30.8. zīm.

6. klase

30.16. Vai kvadrātu var sagriezt divos vienādos

a) desmitstūros,

b) vienpadsmitstūros?

30.17. *a* un *b* ir kaut kādi skaitļi. Atrast tos, ja zināms, ka skaitļi 1 un 2 ir vienādojuma

$$3x^2 + 3ax + (x-1)b = 0$$

saknes.

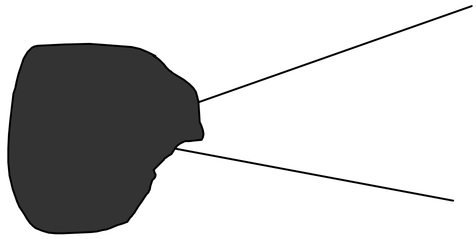
30.18. Cik dažādos veidos skaitli 40 var izsacīt kā triju veselu pozitīvu saskaitāmo summu?

Divi veidi, kas atšķiras tikai ar tajos ieejošo saskaitāmo kārtību, skaitās dažādi.

30.19. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka gan skaitļa n, gan skaitļa $n+1$ ciparu summa dalās ar 13 ?

30.20. Uz leņķa virsotnes uzkritis tintes traips (skat. 30.9. zīm.)

Izmantojot tikai lineālu un cirkuli, konstruēt leņķa bisektrises daļu traipa nenosegtajā apgabalā (izdarīt konstrukcijas traipa nosegtajā apgabalā nevar).



30.9. zīm.

7. klase

30.21. Divu pozitīvu skaitļu starpība ir 1, bet to kvadrātu starpība ir 5. Atrast šos skaitļus.

30.22. Pierādīt, ka katram veselam *x* pastāv vienādība

$$[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right].$$

Pierādīt, ka šāda vienādība pastāv katram skaitlim *x*.

30.23. Atrodiet tādus naturālus *a*, *b* un *c*, ka

$$a + b + c = abc\ .$$

Jāatrod visas iespējas un jāpierāda, ka citu nav.

30.24. Vai var atrast tādus dažādus naturālus skaitļus x, y, z, ka

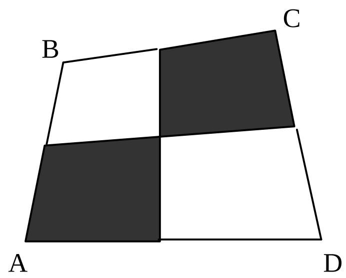
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1\ ?$$

Vai var atrast tādus dažādus naturālus skaitļus x, y, z, u, v, ka

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1\ ?$$

30.25. Četrstūrī *ABCD* novilkti nogriežņi, kas savieno pretējo malu viduspunktus (skat. 30.10. zīm.).

Pierādīt, ka iesvītroto laukumu summa ir puse no četrstūra *ABCD* laukuma.



30.10. zīm.

8. klase

30.21.* Dots, ka *a*, *b* un *c* – pozitīvi skaitļi un $abc = 1$.

Pierādīt, ka

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1.$$

30.22.* Kādā aritmētiskā progresijā pirmo desmit locekļu summa vienāda ar pirmo divdesmit locekļu summu.

Pierādīt, ka šajā progresijā pirmo trīsdesmit locekļu summa ir 0.

30.23.* Dots, ka *a*, *b* un *c* ir kāda trijstūra malu garumi un izpildās vienādība

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\ .$$

Vai šis trijstūris ir taisnleņķa, šaurleņķu vai platleņķa ?

Atbildi pamatot.

30.24.* Vai eksistē tādi naturāli skaitļi *m* un *n*, ka

$$2^n+1=m^3\ ?$$

30.25.* Trijstūrī *ABC* A_1 ir malas *BC* iekšējs punkts, B_1 ir malas *AC* iekšējs punkts, C_1 ir malas *AB* iekšējs punkts. Ap trijstūriem AB_1C_1, CB_1A_1, BA_1C_1 apvilktas riņķa līnijas.

Pierādīt, ka tās visas krustojas vienā punktā.

9. klase

30.26. Skaitļu virkne definēta ar formulu

$$x_n=\frac{2n^2+n+1}{n^2+3n+1}.$$

Pierādīt, ka tās robeža ir 2,

a) lietojot teorēmas par summas, dalījuma utt. robežām;

b) lietojot robežas definīciju un nelietojot teorēmas par summas, dalījuma utt. robežām.

30.27. Dots, ka $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

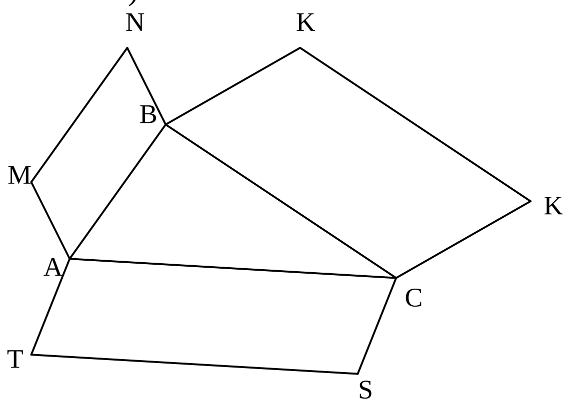
Atrast atvasinājuma $f'(x)$ vērtību, ja

$x=1$; $x=2$; $x=3$.

30.28. Izliekta četrstūra pēc kārtas ņemtu malu garumi ir *a*, *b*, *c* un *d*, bet laukums ir vienāds ar *S*.

Pierādīt, ka $S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

30.29. Uz trijstūra *ABC* malām kā uz pamatiem konstruēti paralelogrami *AMNB*, *BKLC* un *CSTA* (skat. 30.1. zīm).



30.1. zīm.

Pierādīt, ka neviens no nogriežņiem *MK*, *LS* un *TM* nav garāks par abu pārējo nogriežņu garumu summu.

30.30. Aplūkojam bezgalīgu decimaldaļskaitli

$\alpha = 0{,}610141822263034\ldots$,

kas iegūts, aiz komata izrakstot pēc kārtas aritmētiskās progresijas 6, 10, 14, 18, 22, ... locekļus.

Pierādīt, ka α ir iracionāls skaitlis.

10. klase

30.31. Aprēķināt $\operatorname{tg}15°$ ar precizitāti līdz $0{,}001$, nelietojot logaritma lineālu, tabulas, kalkulatorus utt.

30.32. Pierādīt identitāti

$$\sin^2(\alpha - 30°) + \sin^2(\alpha + 30°) - \sin^2\alpha = \frac{1}{2}.$$

30.33. Trīs paralelograma virsotnes atrodas attālumos 3 cm, 4 cm un 5 cm no plaknes *Q*.

Cik lielā attālumā no *Q* var atrasties paralelograma ceturtā virsotne.

Atbildes pamatot.

30.34. Dots, ka *a*, *b* un *c* ir kāda trijstūra malu garumi. Pierādīt, ka

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c}\right| < 1.$$

30.35. Doti naturāli skaitļi *x* un *y*; *u* ir to lielākais kopīgais dalītājs, *v* ir to mazākais kopīgais dalāmais. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot u \cdot v = 3600 \\ u + v = 32. \end{cases}$$

11. klase

20.36. Ar kādām parametra *a* vērtībām nevienādība

$$\lg(x + a) - \frac{1}{2} > \lg\left(\sqrt{2x}\right)$$

ir spēkā visām pozitīvām *x* vērtībām?

20.37. Atrisināt vienādojumu

$$(\sin(x + y) + 1) \cdot (2\sin(2x - y) + 1) = 6\,.$$

20.38. Regulāras četrstūra piramīdas pamata centra attālums līdz sānu šķautnei ir *a*, bet šī centra attālums līdz sānu skaldnei ir *b*.

Aprēķināt piramīdas tilpumu.

20.39. Riņķa līnijas rādiusa garums ir 1. Tās iekšpusē atrodas vairāki nogriežņi, kuru garumu summa ir 32.

Pierādīt, ka var novilkt taisni, kas krusto vismaz 9 no šiem nogriežņiem.

20.40. Doti sviras svari un n atsvari. Atsvarus var novietot tikai uz viena svaru kausa, sveramos priekšmetus – uz otra.

Ir zināms, ka, izmantojot atsvarus no dotā atsvaru komplekta, var uz svariem līdzsvarot katru priekšmetu, kas sver veselu skaitu kilogramus un kura svars nepārsniedz M kg (M – naturāls skaitlis).

Atrast maksimālo iespējamo M vērtību.