Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 31. OLIMPIĀDE

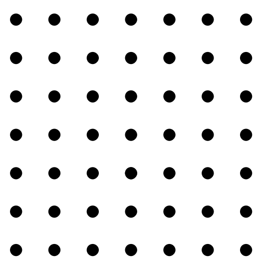
4. klase

31.1. Atrast lielāko piecciparu skaitli, kas dalās ar 3 un kam visi cipari dažādi.

31.2. Kā jāizvēlas “+” un “-“ zīmes skaitļu priekšā, lai pastāvētu vienādība

$$81 = \pm 64 \pm 32 \pm 16 \pm 8 \pm 4 \pm 2 \pm 1 \ ?$$

31.3. Kādā mēnesī trīs trešdienas bija pāru datumos. Kāda nedēļas diena bija šī mēneša 18. datums ?



31.1. zīm.

31.4. 49 punkti izvietoti kvadrātiska režģa virsotnēs (skat. 31.1. zīm.)
Cik ir kvadrātu ar visām virsotnēm šajos punktos, kuru malas paralēlas režģa līnijām?

31.5. Pierādīt, ka kubu var sagriezt 148 kubos.

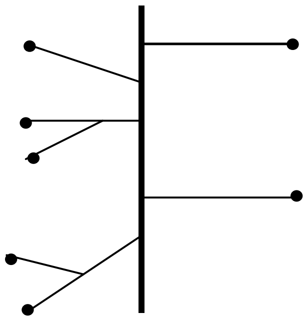
5. klase

31.6. Pierādīt, skaitlis $\underbrace{111\ldots11}_{27\text{ vieninieki}}$ dalās ar 27.

31.7. Jānim bija vairākas divdesmitkapeiku un vairākas piecpadsmitkapeiku monētas. Piekto daļu savas naudas – divas monētas Jānis atdeva māsai, pusi no atlikušās naudas – trīs monētas – samaksāja par teātra biļeti.
Cik naudas Jānim bija sākumā?

31.8. Vai var astoņstūra virsotnēs ierakstīt skaitļus no 1 līdz 8 (katrā virsotnē – citu skaitli) tā, lai, katrai malai aprēķinot tās galos ierakstīto skaitļu starpību, visas astoņas iegūtās starpības būtu dažādas?

31.9. Kā sagriezt kvadrātu 5 daļās, no kurām viena ir trijstūris, otra – četrstūris, trešā – piecstūris, ceturtā – sešstūris un piektā – septiņstūris.



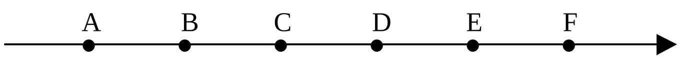
31.2. zīm.

31.10. Ciemā ir 7 mājas. Tās ar šoseju savieno ceļi, kā parādīts 31.2. zīmējumā.

6. klase

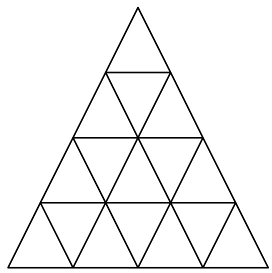
31.11. Vai eksistē galīga punktu kopa, kas attēlojas pati par sevi, pagriežot to ap centru O par $43°$ lielu leņķi? (Kopai jāsatur vairāk par vienu punktu).

31.12. Uz skaitļu ass ar punktiem A, B, C, D, E, F attēloja skaitļus $0, 1, x, -x, x^2, x^3$ (nav dots, ka tieši tādā secībā).



31.3. zīm.

Pēc tam punktus pārbīdīja pa skaitļu asi tā, ka to kārtība nemainījās, bet attālumi starp tiem kaut kā mainījās (skat. 31.3. zīme.)

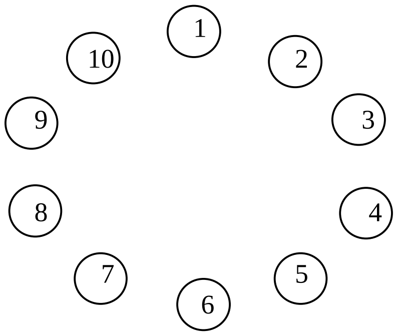


31.4. zIm

31.13. Katrā mazajā trijstūrītī (skat. 31.4. zīm.) atrodas viena figūriņa. Tās novāca nost un pēc tam atkal kaut kā citādi novietoja pa vienai figūrai katrā trijstūrītī.
Vai var gadīties tā, ka katra figūriņa nonāca blakus tam trijstūrītim, kurā atradās sakumā?

31.14. Pa apli izvietotas 10 monētas (skat. 31.4. zīm.).

a



31.4.

Ar vienu gājienu atļauts mainīt vietām jebkuras 2 monētas, starp kurām atrodas viena cita.
Pierādīt, ka, vairākas reizes atkārtojot šo operāciju, monētas var sakārtot kārtībā, kas pretēja dotajai (numuri pieaugs pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam).

31.15. Dots naturāls skaitlis *n*. Pierādīt, ka abi skaitļi $2n+5$ un $3n+8$ vienlaicīgi nedalās ne ar kādu naturālu skaitli, kas lielāks par 1.

7. klase

31.16. Īsta pozitīva daļskaitļa skaitītājs ir 3 reizes mazāks par saucēju. Ja skaitlim pieskaita 1, bet no saucēja atņem 1, iegūst skaitli 1.
Atrast sākumā doto daļskaitli.

31.17. Pierādīt nevienādību

$$x^6 y + xy^6 \geq x^5 y^2 + x^2 y^5,$$

ja x un y – pozitīvi skaitļi.

31.18. Atrast vislielāko pozitīvo skaitli, ar kuru dalās katrs skaitlis, kas satur visus ciparus (katru tieši vienu reizi).

31.19. Cik virsotņu ir izliektam daudzstūrim, kuram diagonāļu ir 14 reizes vairāk nekā malu?

31.20. Plaknē doti 1981 punkti, nekādi 3 no kuriem neatrodas uz vienas taisnes, nekādi 4 – uz vienas riņķa līnijas.

Pierādīt, ka var novilkt riņķa līniju, kas iet caur trim no šiem punktiem un kuras iekšpusē ir tieši 1000 no dotajiem punktiem.

8. klase

31.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

31.22. Aritmētiskā progresijā $a_1, a_2, \ldots, a_{1981}$ nepāra vietās esošo locekļu summa vienāda ar pāra vietās esošo locekļu summu, t. i.,

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{1981} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{1980.}$$

Aprēķināt šīs progresijas visu 1981 locekļu summu.

31.23. Izliekta četrstūra diagonāļu garumi ir d_1 un d_2, bet šaurais leņķis starp diagonālēm ir α. Pierādīt, ka četrstūra laukums ir $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$.

31.24. Dots, ka *a*, *b* un *c* -- dažādi skaitļi. Pierādīt, ka vienādojumam

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)=0.$$

Ir divas reālas saknes.

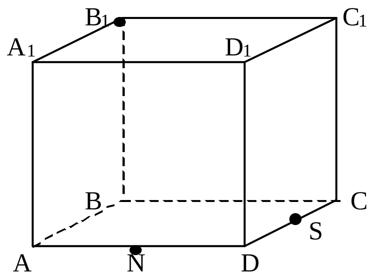
31. 25. a) sadalīt visus naturālos skaitļus no 1 līdz 8 divās grupās bez kopīgiem elementiem tā, lai pirmās grupas skaitļu summa būtu vienāda ar otrās grupas skaitļu summu un pirmās grupas skaitļu kvadrātu summa būtu vienāda ar otrās grupas skaitļu kvadrātu summu.

b) sadalīt visus naturālos skaitļus no 1 līdz 16 divās grupās bez kopīgiem elementiem tā, lai pirmās grupas skaitļu summa būtu vienāda ar otrās grupas skaitļu summu, pirmās grupas skaitļu kvadrātu summa būtu vienāda ar otrās grupas skaitļu kvadrātu summu un pirmās grupas skaitļu kubu summa būtu vienāda ar otrās grupas skaitļu kubu summu.

9. klase

31.26. Skaitļi *a*, *b* un *c* dotajā kārtībā ir pirmais, otrais un trešais loceklis gan aritmētiskajā, gan ģeometriskajā progresijā. Aritmētiskās progresijas ceturtais loceklis ir 5. Aprēķināt ģeometriskās progresijas ceturto locekli.

31.27. Kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķautnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ir paralēlas; $ABCD$ ir kuba skaldne. Konstruēt šķēlumu, kas iet caur B_1 un šķautņu AA_1 un CD viduspunktiem. Skat. 31.1. zīm.



31.1. zīm.

31.28. No koordinātu sistēmas *Oxy* sākumpunkta $(0, 0)$ izrāpo skudra. Vispirms tā norāpo attālumu 1 *Ox* ass virzienā, nonākot punktā $(1, 0)$. Pēc tam skudra pagriežas par $90°$ pa kreisi un norāpo jaunajā virzienā attālumu $\frac{1}{2}$, nonākot punktā $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Pēc tam skudra atkal pagriežas par $90°$ pa kreisi un norāpo jaunajā virzienā attālumu $\frac{1}{4}$, nonākot punktā $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, utt. Skudra turpina kustību, pēc katra taisnveida posma pagriežoties pa kreisi par $90°$ un jaunajā virzienā norāpojot divas reizes īsāku ceļu nekā iepriekšējā virzienā.
Atrast tā punkta koordinātes, kuram skudra pakāpeniski tuvojas.

31.29. Vai eksistē bezgalīga ciparu virkne $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kas vienlaicīgi apmierina divas šādas īpašības:
a) sākot no kādas vietas (bet ne no sākuma), šī virkne satur visus skaitļa $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ ciparus tādā kārtībā, kādā tie parādās $\sqrt{2}$ pierakstā (t.i., eksistē tāds *n*, ka $a_n = 1$, $a_{n+1} = 4$, $a_{n+2} = 1$, $a_{n+3} = 4$, $a_{n+4} = 2, \ldots$);
b) sākot no kādas vietas, skaitļa $\sqrt{2}$ ciparu virkne satur visus virknes (a_n) ciparus tādā kārtībā, kādā tie parādās virknē (a_n)?

31.30. Kādā mežā dzīvo triju dažādu veidu rūķīši: votivapas, šillišallas un puikas. Daži no viņiem savā starpā draudzējas. Ir zināms, ka izpildās šādi četri nosacījumi (sauksim tos par aksiomām):

> **A1**. Ja kāds votivapa *v* un kāds puika *p* draudzējas ar vienu un to pašu šillišallu *s*, tad *s* un *p* draudzējas savā starpā.
> **A2**. Ja vieni un tie paši divi dažādi votivapas draudzējas ar šillišallu *s* un puiku *p*, tad *s* un *p* draudzējas savā starpā.
> **A3**. Ja divi šillišallas s_1 un s_2 draudzējas savā starpā, tad var atrast votivapu, kas draudzējas gan ar s_1, gan ar s_2.
> **A4**. Katram votivapam *v* un katram šillišallam *s* var atrast tādu puiku, ka s draudzējas gan ar *v*, gan ar *s*.

Pierādīt šādu teorēmu:
Ja trīs dažādi šillišallas visi pa pāriem savā starpā draudzējas un, ja nav votivapas, kas draudzējas ar tiem visiem trim, tad ir tāds puika, kas draudzējas ar visiem trim šillišallām.

Katru reizi, kad spriedumā tiek izmantota kāda no aksiomām, tas jānorāda.

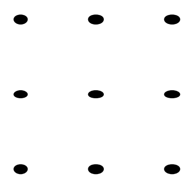
10. klase

31.31. Telpā dotas divas šķērsas taisnes t_1 un t_2. Punkts *A* pieder taisnei t_1, punkts *B* pieder taisnei t_2. Punkta *A* attālums līdz taisnei t_2 ir *a*, punkta *B* attālums līdz taisnei t_1 ir *b*.
Pierādīt, ka attālums starp taisnēm t_1 un t_2 nepārsniedz $\sqrt{ab}$.

31.32. Pierādīt identitāti

$$\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + 120°) + \cos^2(\alpha - 120°) = \frac{3}{2}.$$

31.33. Punktu kopas *M* ortogonālās projekcijas uz trim savstarpēji perpendikulārām plaknēm visas ir tādas, kādas parādītas 31.2. zīmējumā.



31.2. zīm.

(Punkti izvietoti kvadrātiska režģa virsotnēs).
Kāds ir mazākais iespējamais punktu skaits kopā *M* ?

31.34. Dots, ka $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Pierādīt, ka

$$|ac - bd + ad + bc| \le \sqrt{2} .$$

31.35. Funkcija $f(x)$ definēta visiem reāliem *x*. Zināms, ka katram *x* pastāv nevienādība $f(x) \le x$, un zināms, ka katriem diviem skaitļiem *x* un *y* pastāv nevienādība

$$f(x+y) \le f(x) + f(y).$$

Pierādīt, ka katram *x* pastāv vienādība

$$f(x) = x .$$

11. klase

31.36. Atrisināt vienādojumu

$$(\sin(x+y)+1)\cdot(2\sin(2x-y)+1) = 6 .$$

31.37. Regulārā četrstūra piramīdā caur pamata šķautni *AB* vilkta plakne, kas sadala piramīdas sānu virsmas laukumu uz pusēm. Atrast attiecību, kādā šī plakne sadala tās skaldnes laukumu, kas ir pretēja šķautnei *AB*.

31.38. Vai eksistē tāds polinoms $P(x)$, ka visiem x no intervāla $[0, 1]$ pastāv vienādība

$$P(x) = \sin x \,.$$

31.39. Kādiem naturāliem skaitļiem n visi skaitļi

$$n,\ n+6,\ n+8,\ n+12,\ n+14$$

ir pirmskaitļi ?

32.39. Rindā uzrakstīti 30 pirmie naturālie skaitļi

1 2 3 ... 29 30.

Divi spēlētāji pēc kārtas raksta šiem skaitļiem priekšā "+" un "-" zīmes (katrs var rakstīt jebkuru zīmi jebkura vēl brīvā skaitļa priekšā; ar vienu gājienu katrs uzraksta tikai vienu zīmi).

Pirmais spēlētājs grib panākt, lai pēc tam, kad uzrakstītas visas 30 zīmes, iegūtās summas modulis būtu pēc iespējas mazāks.

Kādu vislielāko summas moduli var panākt otrais spēlētājs, ja pirmais spēlē sev visizdevīgākajā veidā?