

Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

## LATVIJAS RAJONU 32. OLIMPIĀDE

### 8. klase

32.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

32.22. Sakārtot pēc lieluma skaitļus

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}.$$

32.23. Taisne iet caur trijstūrī ievilktais riņķa līnijas centru un dala trijstūra perimetru uz pusēm. Pierādīt, ka tā dala uz pusēm arī tās laukumu.

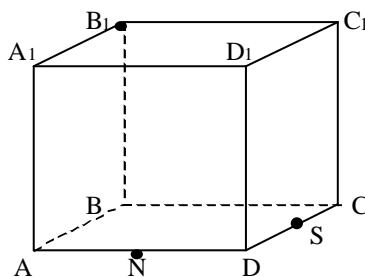
32.24. Dots, ka  $x$  ir naturāls skaitlis un  $|x^2 - 8x + 15|$  ir pirmskaitlis.

Atrast  $x$ .

32.25. Vai eksistē 10 pozitīvi divciparu skaitli, kas veido augošu aritmētisku progresiju un kuru ciparu summas (tajā pašā kārtībā) arī veido augošu aritmētisku progresiju?

### 9. klase

32.26. Kuba  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  šķautnes  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  ir paralēlas;  $ABCD$  ir kuba skaldne. Konstruēt šķēlumu, kas iet caur  $B_1$  un šķautņu  $AA_1$  un  $CD$  viduspunktiem. Skat. 32.1. zīm.



32.1. zīm.

**32.27.** Pierādīt, ka vienādsānu trapecē diagonāle garāka par viduslīniju.

**32.28.** Vai eksistē iracionāls skaitlis, kuru pierakstot kā bezgalīgu decimāldaļu, visi cipari ir tikai 0 vai 1, nevienā vietā divi vai vairāk vieninieki neatrodas blakus un nevienā vietā trīs vai vairāk nulles neatrodas blakus.

**32.29.** Ar  $\max(x, y)$  apzīmējam lielāko no skaitļiem  $x$  un  $y$ . Piemēram,  $\max(3, 5) = 5$ ;  $\max(4, 4) = 4$ . Atrisināt naturālos skaitļos nevienādību

$$\max((n+1)^2, n^2 + n + 2) > \max(n^3 + 2n, n^2 + 2)$$

**32.30.** Traukā  $A$  ir  $1\ l$  ūdens, traukā  $B$  ir  $1\ l$  sulas.  $\frac{1}{3}\ l$  šķīduma no trauka  $A$  pārlej traukā  $B$ , sajauc un no iegūtā šķīduma  $\frac{1}{3}\ l$  pārlej atpakaļ traukā  $A$ . Šādas divkārtas pārļiešanas turpina bezgalīgi daudz reižu. Apzīmēsim ar  $x_n$  sulas daudzumu (litros) traukā  $A$  un pēc tam, kad izdarītas tieši  $n$  divkārtas pārļiešanas. Pieņemam, ka pēc katras pārļiešanas ūdens un sula sajaucas pilnīgi vienmērīgi. Aprēķināt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

## 10. klase

**32.31.** Pierādīt identitāti

$$\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + 120^\circ) + \cos^2(\alpha - 120^\circ) = \frac{3}{2}.$$

**32.32.** Dots, ka  $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$ ,  $x > 2$ .

Aprēķināt  $f'(x)$ .

**32.33.** Trijstūra piramīdā  $ABCD$  pie katras virsotnes esošo triju piramīdas skaldņu iekšējo leņķu summa ir  $180^\circ$ . Pierādīt, ka piramīdas pretējās šķautnes ir pa pāriem vienādas

**32.34.** Dots, ka  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 + f^2 = g^2 + h^2 = 1$ ,  $ac + bd = 0$ ,  $eg + fh = 0$ . Pierādīt, ka  $|ce + df| = |ag + bh|$ .

**32.35.** Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Rūtiņas malas garums ir 1.  $A$  ir viens no rūtiņu stūriem,  $B$  -- otrs stūris, kas atrodas 19 vienības pa labi no  $A$  un 82 vienības uz augšu no  $A$ . Stūrī  $A$  atrodas skudra, kas var rāpot pa rūtiņu malām ar nemainīgu ātrumu 1 vienība 1 sekundē, turklāt kustības virzienu var mainīt tikai rūtiņu stūros. Vai skudra var aizrāpot no  $A$  uz  $B$  tā, lai ceļā pavadītais laiks būtu tieši 1982 sekundes?

## 11. klase

**32.36.** Riņķī ar rādiusu  $R$  ievilkts taisnstūris. Aprēķināt tā lielāko iespējamo laukumu.

**32.37.** Vai eksistē tāds  $x$ , ka  $0 < \sin x < \frac{1}{10}$  un  $\sin 3x > \frac{1}{3}$  ?

**32.38.** Kādiem naturāliem skaitļiem  $n$  visi skaitļi

$$n, n + 6, n + 8, n + 12, n + 14$$

ir pirmskaitļi ?

**32.39.** Trijstūra piramīdā  $ABCD$  pie katras virsotnes esošo triju piramīdas skaldņu iekšējo leņķu summa ir  $180^\circ$  .

Pierādīt, ka piramīdas pretējās šķautnes ir pa pāriem vienādas.

**32.40.** Uzrakstīti divi vārdi latviešu valodā. Jānis aizstāja katru burtu ar ciparu (vienādus burtus -- ar vienādiem cipariem, dažādus burtus -- ar dažādiem cipariem) un ieguva ciparu virkni 79461285318. Gunārs aizstāja burtu  $A$  ar 1,  $D$  ar 111,  $E$  ar 0,  $I$  ar 00,  $\bar{I}$  ar 001,  $N$  ar 101,  $S$  ar 11,  $V$  ar 01,  $Z$  ar 110 un ieguva ciparu virkni 111011011001011101100011. Kādi vārdi bija uzrakstīti?