

Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 32. OLIMPIĀDE

8. klase

32.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

32.22. Sakārtot pēc lieluma skaitļus

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}.$$

32.23. Taisne iet caur trijstūrī ievilktais riņķa līnijas centru un dala trijstūra perimetru uz pusēm. Pierādīt, ka tā dala uz pusēm arī tās laukumu.

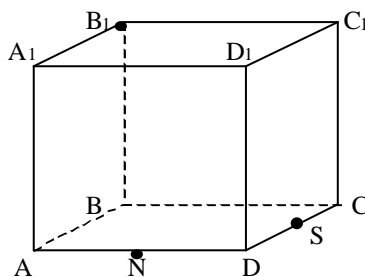
32.24. Dots, ka x ir naturāls skaitlis un $|x^2 - 8x + 15|$ ir pirmskaitlis.

Atrast x .

32.25. Vai eksistē 10 pozitīvi divciparu skaitli, kas veido augošu aritmētisku progresiju un kuru ciparu summas (tajā pašā kārtībā) arī veido augošu aritmētisku progresiju?

9. klase

32.26. Kuba $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ šķautnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ir paralēlas; $ABCD$ ir kuba skaldne. Konstruēt šķēlumu, kas iet caur B_1 un šķautņu AA_1 un CD viduspunktiem. Skat. 32.1. zīm.



32.1. zīm.

32.27. Pierādīt, ka vienādsānu trapecē diagonāle garāka par viduslīniju.

32.28. Vai eksistē iracionāls skaitlis, kuru pierakstot kā bezgalīgu decimāldaļu, visi cipari ir tikai 0 vai 1, nevienā vietā divi vai vairāk vieninieki neatrodas blakus un nevienā vietā trīs vai vairāk nulles neatrodas blakus.

32.29. Ar $\max(x, y)$ apzīmējam lielāko no skaitļiem x un y . Piemēram, $\max(3, 5) = 5$; $\max(4, 4) = 4$. Atrisināt naturālos skaitļos nevienādību

$$\max((n+1)^2, n^2 + n + 2) > \max(n^3 + 2n, n^2 + 2)$$

32.30. Traukā A ir $1\ l$ ūdens, traukā B ir $1\ l$ sulas. $\frac{1}{3}\ l$ šķīduma no trauka A pārlej traukā B , sajauc un no iegūtā šķīduma $\frac{1}{3}\ l$ pārlej atpakaļ traukā A . Šādas divkārtas pārļiešanas turpina bezgalīgi daudz reižu. Apzīmēsim ar x_n sulas daudzumu (litros) traukā A un pēc tam, kad izdarītas tieši n divkārtas pārļiešanas. Pieņemam, ka pēc katras pārļiešanas ūdens un sula sajaucas pilnīgi vienmērīgi. Aprēķināt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

10. klase

32.31. Pierādīt identitāti

$$\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + 120^\circ) + \cos^2(\alpha - 120^\circ) = \frac{3}{2}.$$

32.32. Dots, ka $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$, $x > 2$.

Aprēķināt $f'(x)$.

32.33. Trijstūra piramīdā $ABCD$ pie katras virsotnes esošo triju piramīdas skaldņu iekšējo leņķu summa ir 180° . Pierādīt, ka piramīdas pretējās šķautnes ir pa pāriem vienādas

32.34. Dots, ka $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 + f^2 = g^2 + h^2 = 1$, $ac + bd = 0$, $eg + fh = 0$. Pierādīt, ka $|ce + df| = |ag + bh|$.

32.35. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Rūtiņas malas garums ir 1. A ir viens no rūtiņu stūriem, B -- otrs stūris, kas atrodas 19 vienības pa labi no A un 82 vienības uz augšu no A . Stūrī A atrodas skudra, kas var rāpot pa rūtiņu malām ar nemainīgu ātrumu 1 vienība 1 sekundē, turklāt kustības virzienu var mainīt tikai rūtiņu stūros. Vai skudra var aizrāpot no A uz B tā, lai ceļā pavadītais laiks būtu tieši 1982 sekundes?

11. klase

32.36. Riņķī ar rādiusu R ievilkts taisnstūris. Aprēķināt tā lielāko iespējamo laukumu.

32.37. Vai eksistē tāds x , ka $0 < \sin x < \frac{1}{10}$ un $\sin 3x > \frac{1}{3}$?

32.38. Kādiem naturāliem skaitļiem n visi skaitļi

$$n, n + 6, n + 8, n + 12, n + 14$$

ir pirmskaitļi ?

32.39. Trijstūra piramīdā $ABCD$ pie katras virsotnes esošo triju piramīdas skaldņu iekšējo leņķu summa ir 180° .

Pierādīt, ka piramīdas pretējās šķautnes ir pa pāriem vienādas.

32.40. Uzrakstīti divi vārdi latviešu valodā. Jānis aizstāja katru burtu ar ciparu (vienādus burtus -- ar vienādiem cipariem, dažādus burtus -- ar dažādiem cipariem) un ieguva ciparu virkni 79461285318. Gunārs aizstāja burtu A ar 1, D ar 111, E ar 0, I ar 00, \bar{I} ar 001, N ar 101, S ar 11, V ar 01, Z ar 110 un ieguva ciparu virkni 111011011001011101100011. Kādi vārdi bija uzrakstīti?