Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 33. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUM

33.1. Piemēram. tā:

$$(1+2)\cdot(3+4-5)\cdot(6+7)=78.$$

33.2. $4620 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$. Tā kā 11 tālāk reizinātājos nesadalās, tad tāds naturāls skaitlis nav iespējams, jo vienam no šī skaitļa cipariem būtu jābūt skaitļa 11 daudzkārtnim, bet tas nevar būt.

33.3. a) To var izdarīt, piemēram, šādi:

3, 1, 2, 1, 3, 2.

b) To var izdarīt, piemēram, šādi:

2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4.

33.4. a) Jā, var, sadalām kvadrātu četrās daļās ar šādiem laukumiem:

daļa A -- 10 cm^2,
daļa B -- 20 cm^2,
daļa C -- 30 cm^2,
daļa D -- 40 cm^2.

Uzdevuma prasības apmierina šāds krāsojums:

zaļā krāsa -- daļas B, C, D,
zilā krāsa -- daļas A, C, D,
sarkanā krāsa -- daļas A, B, D,
melnā krāsa -- daļas A, B, C.

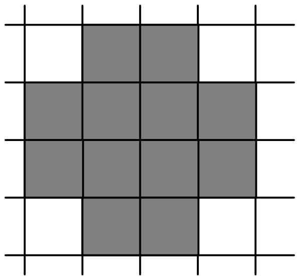
b) Nē, nevar. Pieņemsim pretējo, ka tas ir izdarīts. Tad zaļā krāsā nav nokrāsoti 9 cm^2, zilā krāsā nav nokrāsoti 19 cm^2, sarkanā krāsā nav nokrāsoti 29 cm^2, melnā krāsā nav nokrāsoti 39 cm^2.

Tātad punkti, kas nav nokrāsoti kaut vai vienā krāsā aizņem ne lielāku laukumu kā

$$9+19+29+39=96\ cm^2.$$

Tāpēc vismaz 4 cm^2 nokrāsoti visās četrās krāsās.

33.5. To var izdarīt , piemēram, tā, kā parādīts 33.6. zīm.



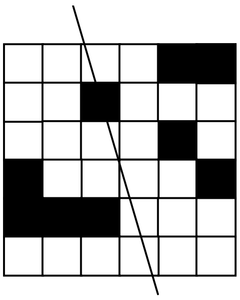
33.6. zīm

33.6. Piemēram, tāds ir skaitlis 9981.

33.7. Nē, nevar. Pieņemsim, ka mazākais riekstu skaits vienā kabatā ir a_1, otrs mazākais riekstu skaits vienā kabatā -- a_2, ..., lielākais riekstu skaits vienā kabatā -- a_{10}. Tad $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \ldots, a_{10} \geq 10$. Tātad

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \geq 1 + 2 + \cdots + 10 = 45,$$

bet Jānim ir tikai 44 rieksti.



33.7. zīm.

33.8. Taisne, kas iet caur kvadrāta centru, dala kvadrāta laukumu uz pusēm. Tāpēc 33.7. zīm. novilktā taisne dala uz pusēm gan visa kvadrāta laukumu, gan arī melnā kvadrāta laukumu; tāpēc tā dala uz pusēm arī nenokrāsoto laukumu.

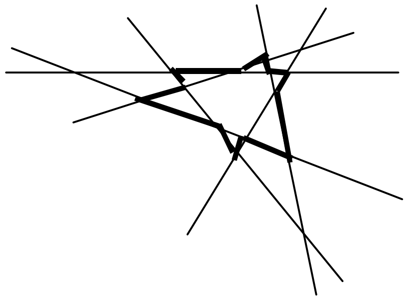
33.9. Apzīmēsim visu uzrakstīto skaitļu summu ar *S*. Tad

$$S = a + (b + c + d) + (e + f + g) = a + 0 + 0.$$

Līdzīgi pierāda, ka $S = a = b = c = d = e = f = g$. No šejienes

$$0 = a + b + c = 3a \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

Protams arī pārējie skaitļi ir vienādi ar 0.

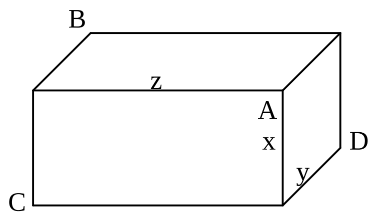


33.8. zīm

33.10. a) Skat. 33.8. zīm.

b) Katru taisni krusto ne vairāk kā 5 citas taisnes; tātad uz tās veidojas ne vairāk kā 4 nogriežņi. Ne vairāk kā divi no tiem var būt viena un tā paša daudzstūra malas (jo daudzstūra malām nevar būt kopīgu punktu); tāpēc daudzstūra malu skaits nepārsniedz $2 \cdot 6 = 12$.

33.11. Apzīmēsim šķautņu garumus ar x, y, z, ka parādīts 33.9. zīmējumā.



33.9. zīm.

Tad $4x + 4y + 4z = 120 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 30$.

No trijstūra nevienādības iegūstam:

$$AB + AC + AD < (y+z) + (x+z) + (x+y) = 2 \cdot (x+y+z) = 60,$$

kas arī bija jāpierāda.

33.12. Ievērosim, ka $5^3 + 6^3 = 125 + 216 = 341 < 343 = 7^3$.

Tālāk iegūstam

$$5^{100} + 6^{100} = 5^{97} \cdot 5^3 + 6^{97} \cdot 6^3 < 7^{97} \cdot 5^3 + 7^{97} \cdot 5^3 =$$
$$7^{97}\left(5^3 + 6^3\right) < 7^{97} \cdot 7^3 = 7^{100}.$$

33.13. Pieņemsim pretējo, ka katram skolēnam līdzi bija mazāk par 9 rubļiem. Tad tiem 13 skolēniem, kam bija tikai papīra nauda, katram bija ne vairāk par 8 rubļiem (papīra nauda sākas no viena rubļa), bet abiem pārējiem katram ne vairāk par 8 rubļiem un 99 kapeikām. Tāpēc kopējā naudas summa nebūtu lielāka par

$113 \cdot 8 + 2 \cdot 8{,}99 = 121{,}98$ rbļ. Pretruna.

33.14. Ievērosim, ka 111111 dalās ar 7 un arī 1001 dalās ar 7. Tāpēc ar 7 dalās arī skaitlis $\underbrace{111\ldots11}_{6\cdot 6\ reizes}1001$.

33.15. Dotais skaitlis 16 dod atlikumu 1, dalot ar 3. Viegli pārbaudīt, ka:

a) ja x dod atlikumu 1, dalot ar 3, tad arī x^2 dod atlikumu 1, dalot ar 3,

b) ja x un y dod atlikumus 1, dalot ar 3, tad arī skaitlis $|x-y|+1$ dod atlikumu 1, dalot ar 3.

Tas nozīmē, ka uz lapas var iegūt tikai skaitļus, kas dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tā kā 1983 dalās ar 3 bez atlikuma, tad to iegūt uz lapas norādītajā veidā nevar.

33.16. Aplūkosim starpības

$$\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}=\frac{x(b-a)}{b(b+x)} \quad \text{un} \quad \frac{a+y}{b+y}-\frac{a}{b}=\frac{y(b-a)}{b(b+y)}.$$

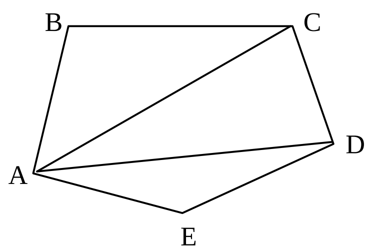
Tā, kā a, b, x, y ir pozitīvi skaitļi, tad abas starpības ir vai nu vienlaicīgi pozitīvas, negatīvas, vai nulles (atkarībā no skaitļu a un b starpības). Tas nozīmē, ka viens no zēniem aprēķinos kļūdījās

33.17. Pēc dotā a^2+a+1 un b^2+b+1; tāpēc $a^2+b^2=(a+b)+2$.

Pareizinot dotās vienādības attiecīgi ar a un b, iegūstam

$a^3=a^2+a$ un $b^3=b^2+b$; tāpēc

$$a^3+b^3=\left(a^2+b^2\right)+(a+b)=(a+b)+2+(a+b)=2(a+b+1).$$



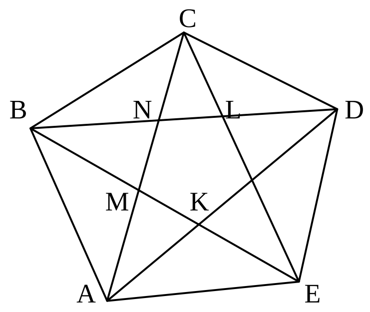
33.10. zīm.

33.18. Skat. 33.10. zīm.

Tā kā $AB = BC + 1$, tad $S_{ABC} \le \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\frac{1}{2}$, līdzīgi $S_{AED} \le \frac{1}{2}$.

No trijstūru nevienādības $AC < AB + BC = 2$. Tātad $S_{ACD} \le \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD < \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1$.

Tāpēc $S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE} < \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$.



33.11. zīm.

33.19. Aplūkosim piecstūri *ABCD* (skat. 33.11. zīm.).

a) Izmantojot trijstūra nevienādību, iegūstam:

$$AC = AM + MN + NC < (AK + KM) + (MB + BN) + (NL + LC) =$$
$$AK + (KM + MB) + (BN + NL) + LC < AD + BE + BD + CE.$$

c) Nē nevar apgalvot. Aplūkosim piecstūri, kura diagonāles *AD* un *AB* ir "ļoti garas" (piemēram, 100 cm), bet pārējās diagonāles – "ļoti īsas" (piemēram, īsākas par 1 cm). Viegli pārbaudīt, ka šajā gadījumā prasītā nevienādība neizpildās diagonālei *AD*.

33.20. Viegli pārbaudīt, ka, ja mašīnas x, y, z pirms apdzīšanas šādā kārtībā novietotas pulksteņa rādītāja virzienā, tad pēc apdzīšanas tās šādā kārtībā novietotas pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, un otrādi. Tā kā beigu izvietojums ir tāds pats, kā sākotnējais, tad "orientācija" mainījusies pāra skaitu reižu; tāpēc noticis pāra skaits apdzīšanu.

33.21. Acīmredzot $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$. Nevienādība $\sqrt{2} < \sqrt[5]{6}$ seko no šādiem pārveidojumiem:

$$\sqrt{2} < \sqrt[5]{6} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{2}\right)^{10} < \left(\sqrt[5]{6}\right)^{10} \quad \Leftrightarrow \quad 2^5 < 6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 32 < 36.$$

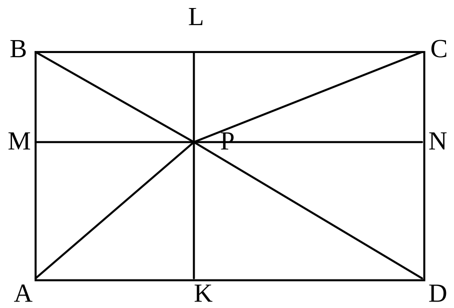
Līdzīgi iegūstam

$$\sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt[5]{6}\right)^{15} < \left(\sqrt[3]{3}\right)^{15} \quad \Leftrightarrow \quad 6^3 < 3^5 \quad \Leftrightarrow 216 < 243.$$

Tātad $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{3}$.

33.22. Aritmētiskās progresijas locekļu starpības ir tās diferences *d* daudzkārtņi. Tātad $113 - 41 = 72$ un $193 - 113 = 80$ dalās ar *d*. Tātad arī $80 - 72 = 8$ dalās ar *d*. Tas nozīmē, ka $d \le 8$. Vērtība $d = 8$ ir iespējama; aritmētiskā progresija $a_k = 8k + 1$ ar diferenci 8 satur visus norādītos skaitļus.

33.23. Caur punktu *P* novelkam taisni *KL* paralēli *AB* un taisni *MN* paralēli *BC* (skat. 33.2. zīm.).

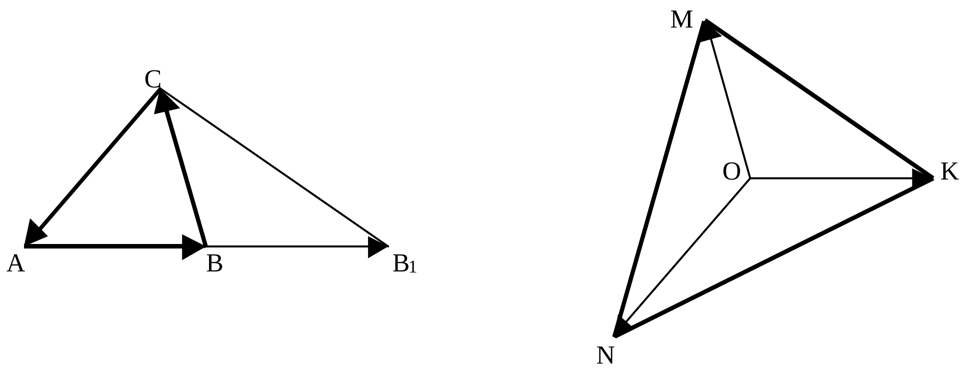


33.2. zīm.

Taisnstūris sadalās četros taisnstūros. No Pitagora teorēmas seko vienādības

$$AP^2 + CP^2 = \left(PK^2 + AK^2\right) + \left(PL^2 + LC^2\right) =$$
$$\left(PK^2 + PM^2\right) + \left(PL^2 + PN^2\right) =$$
$$\left(PK^2 + PN^2\right) + \left(PL^2 + PM^2\right) = DP^2 + BP^2.$$

33.24. Atliekam vektoru $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB}$ (skat. 33.3. zīm.).



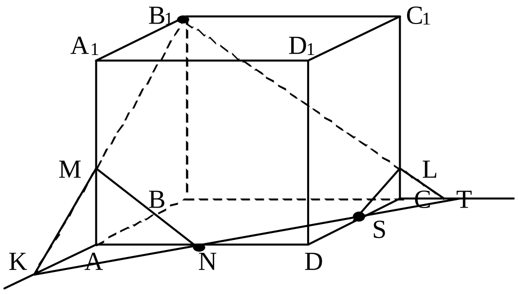
33.3. zīm.

Tad trijstūri CBB_1 un MOK ir vienādi (pēc divām malām un leņķa starp tām). Bet trijstūru ABC un CBB_1 laukumi ir vienādi, jo tiem ir vienādi pamati un kopīgs augstums. Tātad trijstūru MOK un ABC laukumi ir vienādi. Līdzīgi pierāda, ka $S_{MON} = S_{NOK} = S_{ABC}$. No šejienes seko, ka trijstūra *KMN* laukums ir 3 reizes lielāks par trijstūra *ABC* laukumu.

33.25. Apiesim slēgto lauzto līniju sākot ar kādu tās virsotni *A* un atgriezīsimies atpakaļ. Katrā solī apgaitas virziens mainās no vertikālā uz horizontālo, un otrādi. Tā kā izejas un ieejas virzieni arī ir pretēji, lai tas būtu iespējams, posmu skaitam jābūt pāra skaitlim. Tātad līnijai nevar būt 7 vai 1983 posmi.

Horizontālā virzienā mēs virzāmies pa labi vai pa kreisi. Lai atgrieztos sākuma punktā jāizdara tikpat soļus pa labi cik pa kreisi. Tātad soļu skaits horizontālajā virzienā ir pāra skaitlis 2*k*. Pēc katra soļa horizontālajā virzienā seko tieši viens solis vertikālajā virzienā; tas nozīmē, ka arī vertikālajā virzienā mēs izpildīsim $2k$ soļus. Kopā iznāks $4k$ soļi -- lauztās līnijas posmi. Tā kā 1982 ar 4 nedalās, tad prasītā lauztā līnija ar 1982 posmiem neeksistē.

33.26. Skat. 33.4. zīm.



33.4. zīm.

Konstrukcijas gaita:

1) $K = (NS) \cap (AB)$;

punkts K pieder šķēluma plaknei, jo punkti N un S pieder šķēluma plaknei;

2) $M = (KB_1) \cap (AA_1)$;

punkts M pieder šķēluma plaknei, jo punkti K un B_1 pieder šķēluma plaknei;

3) $T = (NS) \cap (BC)$;

punkts T pieder šķēluma plaknei, jo punkti N un S pieder šķēluma plaknei;

4) $L = (TB_1) \cap (CC_1)$;

punkts L pieder šķēluma plaknei, jo punkti T un B_1 pieder šķēluma plaknei.

Meklētais šķēlums ir piecstūris B_1LSNM .

33.27. Ievietojot dotajā vienādībā $x = y = 0$, iegūstam

$$f(0) + f(0) = 2f(0) + 2f(0),$$

no kurienes $f(0) = 0$.

Ievietojot dotajā vienādībā $x = y$, iegūstam

$$f(2x) + f(0) = 2f(x) + 2f(x).$$

Tā kā $f(0) = 0$, tad $f(2x) = 4f(x)$.

Ievietojot dotajā vienādībā $x = 2y$, iegūstam

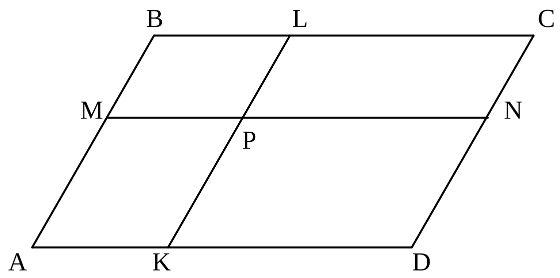
$$f(3y) + f(y) = 2f(2y) + 2f(y), \text{ no kurienes}$$

$$f(3y) = 2f(2y) + f(y) = 9f(y).$$

No šejienes pakāpeniski iegūstam

$$f(3) = 9 \cdot f(1) = 9, \quad f(9) = 9 \cdot f(3) = 81,$$
$$f(27) = 9 \cdot f(9) = 81, \quad f(81) = 9 \cdot f(27) = 6561\,.$$

33.28. Caur punktu *P* novelkam taisni *KL* paralēli *AB* un taisni *MN* paralēli *BC* (skat. 33.5. zīm.).



33.5. zīm.

Tad *ABCD* sadalās 4 paralelogramos, kuru šauro leņķi apzīmējam ar α. No kosinusu teorēmas iegūstam

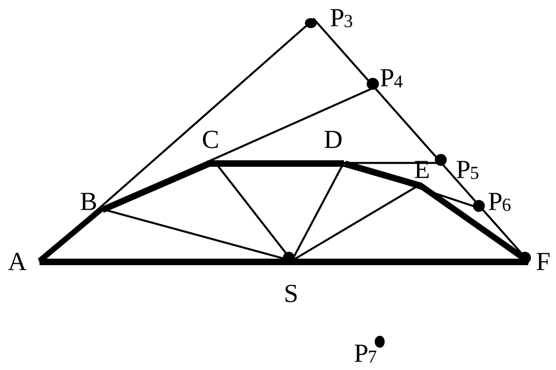
$$AP^2 = PM^2 + PK^2 + 2 \cdot PM \cdot PK \cdot \cos\alpha,$$
$$CP^2 = PN^2 + PL^2 + 2 \cdot PN \cdot PL \cdot \cos\alpha,$$
$$BP^2 = PM^2 + PL^2 - 2 \cdot PM \cdot PL \cdot \cos\alpha,$$
$$DP^2 = PK^2 + PN^2 - 2 \cdot PK \cdot PN \cdot \cos\alpha.$$

Tātad

$$AP^2 + CP^2 - BP^2 - DF^2 =$$
$$2\cos\alpha \cdot (PM \cdot PK + PN \cdot PL + PM \cdot PL + PK \cdot PN) =$$
$$2\cos\alpha \cdot (PM + PN) \cdot (PK + PL) = 2\cos\alpha \cdot MN \cdot KL =$$
$$2\cos\alpha \cdot AD \cdot AB\,.$$

Šis lielums nav atkarīgs no punkta *P* stāvokļa paralelograma iekšpusē.

33.29. Zīmējumā 33.6. parādīts skats uz piramīdu no augšas.



33.6. zīm.

Projicējot piramīdas virsotni S punktā P_k pamata plaknē iegūstam k-stūri ($k = 3, 4, 5, 6, 7$).

33.30. a) Jā, var. Ja skudra pirmajā gājienā rāpo pa labi, otrajā -- pa kreisi, trešajā -- pa labi utt., tad

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{4}.$$

b) Nē, nevar. Pieņemsim pretējo, ka skudra pēc n gājieniem atrodas punktā ar koordināti $\frac{1}{4}$. Tad izpildās vienādība

$$\pm\frac{1}{3} \pm \frac{1}{9} \pm \cdots \pm \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}.$$

Pareizinot šo vienādību ar 3^n, vienādības kreisajā pusē iegūstam veselu skaitli, bet labajā pusē skaitli $\frac{3^n}{4}$, kas nav vesels skaitlis; iegūta pretruna, kas pierāda, ka skudra nekad neatradīsies punktā ar koordināti $\frac{1}{4}$.

33.31. Pareizinām $f(x)$ ar $(x-1)$. Iegūstam vienādību

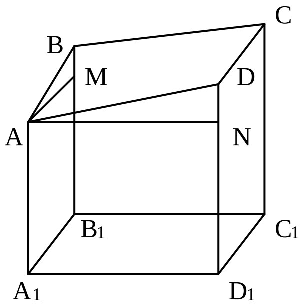
$$\begin{aligned}
&(x-1)\cdot f(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^4+1\right)\cdot\left(x^8+1\right)\cdot\left(x^{16}+1\right) = \\
&\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^4+1\right)\cdot\left(x^8+1\right)\cdot\left(x^{16}+1\right) = \\
&\left(x^4-1\right)\cdot\left(x^4+1\right)\cdot\left(x^8+1\right)\cdot\left(x^{16}+1\right) = \\
&\left(x^8-1\right)\cdot\left(x^8+1\right)\cdot\left(x^{16}+1\right) = \\
&\left(x^{16}-1\right)\cdot\left(x^{16}+1\right) = \\
&\left(x^{32}-1\right).
\end{aligned}$$

Izmantojot atvasinājuma formulas, iegūstam

$$f'(x) = \frac{32x^{31}(x-1) - \left(x^{32}-1\right)}{(x-1)^2}.$$

Ja $x = 2$, tad $f'(x) = 32\cdot 2^{31} - 2^{32} + 1 = 15\cdot 2^{32} + 1$.

33.32. Apzīmēsim kvadrāta projekcijas ar $A_1B_1C_1D_1$. Pieņemsim no pretējā, ka ne visi punkti A, B, C, D atrodas vienādos attālumos no plaknes π. Pieņemsim , ka A ir tā kvadrāta virsotne, kas atrodas vistuvāk π (skat. 33.7. zīm.).



33.7. zīm.

Novelkam $AM \perp BB_1$ un $AN \perp DD_1$. Tad *B* un *D* atrodas ne zemāk par *M* un *N*. Tā kā $AB = AD$ un $AM = AN$, tad arī $BM = DN$ un $BB_1 = DD_1$. Apzīmēsim $ABCD$ diagonāļu krustpunktu ar *O* un šķirosim divus gadījumus:

a) $BM = DN = 0$. Tad no augstāk pierādītā seko, ka *A*, *B* un *D* atrodas vienādā attālumā no π. Tā ka $O \in BD$, tad arī *O* atrodas šādā attālumā no π, bet tad $AO \parallel \pi$. Tā kā $C \in AO$, tad arī *C* atrodas tādā pašā attālumā no π.

b) $BM = DN > 0$. Tad *B*, *D* un tāpēc arī *O* atrodas tālāk no π nekā no *A*. Tāpēc *AC* nav paralēls π, un $A_1C_1 < AC$. Bet $BD \parallel \pi$, tāpēc $B_1D_1 = BD = AC$. Tātad $B_1D_1 > A_1C_1$, kas nav iespējams. Tātad b) gadījums nevar būt.

33.33. Ja visi leņķi α, β, γ ir šauri, tad nevienādības pareizība acīmredzama. Ja viens no tiem ir taisns vai plats, tad pārējie leņķi ir šauri. Pieņemsim, ka šaurie leņķi ir α un β. Tad iegūstam

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos(\pi - (\alpha + \beta)) =$$
$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta) =$$
$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta =$$
$$\cos\alpha(1 - \cos\beta) + \cos\beta + \sin\alpha\sin\beta > 0\,.$$

33.34. Pieņemsim, ka skaitļa 2^{1983} pieraksts satur *n* ciparus, bet skaitļa 5^{1983} pieraksts satur *m* ciparus. Tā ka šie skaitļi nav veselas desmitnieka pakāpes, tad iegūstam vienādības

$$10^{n-1} < 2^{1983} < 10^n,$$
$$10^{m-1} < 5^{1983} < 10^m.$$

Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam

$$10^{m+n-2} < 10^{1983} < 10^{m+n},$$

no kurienes seko $m+n-2<1983<m+n$. Tātad $1983=m+n-1$, un abi skaitļi kopā decimālajā pierakstā satur 1984 ciparus.

33.35. Var izvēlēties 992 skaitļus; piemēram, visus nepāra skaitļus (tad jebkuru divu izvēlēto skaitļu summa ir pāra skaitlis un tātad nav izvēlētais skaitlis).
Pierādīsim, ka vairāk skaitļu izvēlēties nevar.
Ar *n* apzīmēsim lielāko izvēlēto skaitli. Aplūkosim divus gadījumus
Ja $n=2k+1$ ir nepāra skaitlis, tad aplūkosim skaitļu pārus

$$(1,\ 2k),\ (2,\ 2k-1),\ldots,(k,\ k+1).$$

No katra šāda skaitļu pāra var izvēlēties ne vairāk kā vienu skaitli (pretējā gadījumā šo skaitļu summa būs vienāda ar izvēlēto skaitli *n*).
Tātad izvēlēto skaitļu skaits nepārsniedz

$$k+1=\frac{n+1}{2}\leq\frac{1983+1}{2}=992.$$

Līdzīgi aplūko gadījumu, kad *n* ir pāra skaitlis.

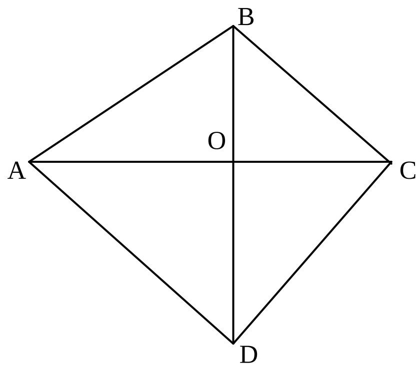
33.36. Izmantojot formulas, iegūstam

$$\begin{aligned}&\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cdot\cos x+\cos 2x\cdot\sin x=\\&2\sin x\cdot\cos^2 x+\sin x\cdot\left(1-2\sin^2 x\right)=\\&2\sin x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)+\sin x\cdot\left(1-2\sin^2 x\right)=\\&3\sin x-4\sin^3 x.\end{aligned}$$

Ja $0<\sin x<\frac{1}{10}$, tad $\sin 3x<3\sin x$. Tāpēc $\sin 3x<\frac{3}{10}$, un nevar izpildīties nevienādība $\sin 3x>\frac{1}{3}$.

36.37. Šo šķēlumu var iztēloties kā divu trijstūra piramīdu ACB_1D_1 un BDA_1C_1 šķēlumu. Tām šķeļoties, rodas 9 daļas (8 tetraedri un oktaedrs); pie katra kuba šķautnes vēl paliek viena daļa -- neregulāra trijstūra piramīda. Kopējais daļu skaits ir $9+12=21$.

36.38. Aplūkosim 33.8. zīmējumu.



33.8. zīm.

Tad no Pitagora teorēmas iegūstam

$$AB^2 = AO^2 + OB^2,$$
$$BC^2 = BO^2 + OC^2,$$
$$CD^2 = CO^2 + OD^2,$$
$$AD^2 = AO^2 + OD^2.$$

No šejienes seko, ka

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

Tāpēc $AD = \sqrt{100 + 144 - 121} = \sqrt{123}$.

36.39. Prasītais seko no vairākām identitātēm.

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) - 3abc;$$

No šejienes seko, ka $a^2 + b^2 + c^2$ ir vesels skaitlis. Līdzīgi no identitātes

$$a^2b + ab^2 + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2 =$$
$$(a + b + c) \cdot (ab + ac + bc) - 3abc$$

seko, ka $a^2b + ab^2 + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2$ ir vesels skaitlis.

No identitātes

$$a^3 + b \quad + c^3 = (a + b + c) \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2\right)$$

seko, ka $a^3 + b^3 + c^3$ ir vesels skaitlis.

33.40. a) Nē, nevar būt.. Telpā ir trīs savstarpēji perpendikulari virzieni (sauksim tos par *a*, *b* un *c*). Apiesim šo slēgto lauzto līniju un atgriezīsimies sākotnējā punktā. Lai atgrieztos sākotnējā stāvoklī, katrā no virzieniem jāiet tikpat soļus uz priekšu cik atpakaļ. Tātad katrā virzienā iet pāra skaits līnijas posmu; tātad posmu kopskaits dalās ar 3 un nevar būt vienāds ar 1983.

b) Nē, nevar būt. No dotā seko, ka apgaitas virzieni periodiski atkārtojas ($a, b, c, a, b, c, \ldots$); tātad lauztās līnijas posmu skaitam ir jādalās ar 3, bet skaitlis 1982 ar 3 nedalās.