

Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 33. OLIMPIĀDE

4. klase

33.1. Ievietot dotajā izteiksmē iekavas, lai iegūtu pareizu vienādību:

$$1 + 2 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 6 + 7 = 78.$$

(Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt)

33.2. Vai naturāla skaitļa reizinājums var būt 4620 ?

33.3. a) Uzrakstīt rindā citu aiz cita divus vieniniekus, divus divniekus un divus trijniekus tā, lai starp abiem vieniniekiem būtu uzrakstīts tieši viens cits cipars, starp abiem divniekiem – tieši divi citi cipari, starp abiem trijniekiem – tieši trīs citi cipari.

lai starp abiem vieniniekiem būtu uzrakstīts tieši viens cits cipars, starp abiem divniekiem – tieši divi citi cipari, starp abiem trijniekiem – tieši trīs citi cipari

(Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt).

c) Uzrakstīt rindā citu aiz cita divus vieniniekus, divus divniekus, divus trijniekus un divus četriniekus tā, lai starp abiem vieniniekiem būtu uzrakstīts tieši viens cits cipars, starp abiem divniekiem – tieši divi citi cipari, starp abiem trijniekiem – tieši trīs citi cipari, starp abiem četriniekiem – tieši četri citi cipari.

(Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt).

33.4. Kvadrāta laukums ir 100 cm^2 .

a) Vai var šajā kvadrātā nokrāsot 90 cm^2 zaļā krāsā, 80 cm^2 -- zilā krāsā, 70 cm^2 -- sarkanā krāsā un 60 cm^2 melnā krāsā tā, lai neviens kvadrāta punkts nebūtu nokrāsots visās četrās krāsās ?

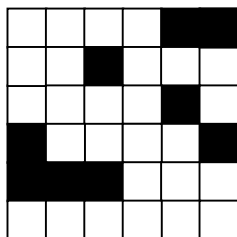
b) Vai var šajā kvadrātā nokrāsot 91 cm^2 zaļā krāsā, 81 cm^2 -- zilā krāsā, 71 cm^2 -- sarkanā krāsā un 61 cm^2 melnā krāsā tā, lai neviens kvadrāta punkts nebūtu nokrāsots visās četrās krāsās ?

33.5 Sauksim divas rūtiņas par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala vai kopīga virsotne. Nokrāsot burtnīcas lapā galīgu skaitu rūtiņu melnā krāsā tā, lai katrai melnai rūtiņai būtu vismaz četras melnas blakus rūtiņas. (Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt).

5. klase

33.6. Atrast naturālu skaitli, kura ciparu summa dalās ar 27, bet pats ar 27 nedalās.

33.7. Jānim ir 44 rieksti un 10 kabatas. Vai viņš var izvietot riekstus kabatās tā, lai katrā kabatā tā, lai katrā kabatā būtu vismaz viens rieksts un nekādās divās kabatās nebūtu vienāds riekstu skaits ?

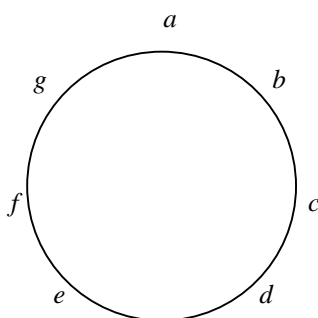


33.1. zīm.

33.8. Kvadrāts sadalīts 36 rūtiņas ar malas garumu 1, dažas no tām nokrāsotas melnas (skat. 33.1. zīm.).

Kā novilkt taisni, kas daļa uz pusēm gan nokrāsoto, gan nenokrāsoto laukumu ?
Pietiek parādīt, kā novilkt vienu šādu taisni.

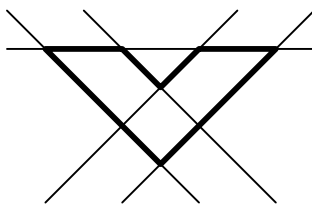
33.9. Pa pali ierakstīti 7 skaitļi (skatīt 33.2. zīm.)



33.2. zīm.

Zināms, ka katru triju pēc kārtas ierakstītu skaitļu summa ir O . Pierādīt, ka visi izrakstītie skaitļi ir nulles.

33.10. Sešstūrim, kas parādīts 33.3 zīm., visas 6 malas izvietotas uz 5 taisnēm.



33.3. zīm.

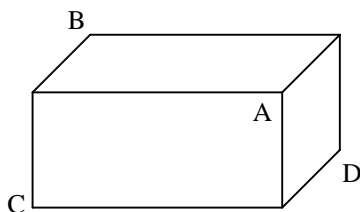
a) Uzzīmēt divpadsmitstūri, kura visas 12 malas novietotas uz 6 taisnēm.

b) Vai daudzstūrim, kuram ir vairāk nekā 12 malas, visas malas var būt novietotas uz 6 taisnēm ?

Katrā daudzstūra virsotnē sanāk kopā tikai divas malas.

6. klase

33.11. Ķieģelim visas skaldnes ir taisnstūri. Tā visu šķautņu garumu summa ir 120 cm. Pierādīt, ka $|AB| + |AC| + |AD| < 60 \text{ cm}$. (skat. 33.4. zīm.)



34.4. zīm.

33.12. Kurš no diviem skaitļiem lielāks: $5^{100} + 6^{100}$ vai 7^{100} ?

33.13. Ekskursijā piedalījās 15 skolēni. Visiem kopā līdzī bija ne mazāk kā 122 rubļi. Turklāt sīknauda bija tikai diviem skolēniem; visiem pārējiem bija tikai papīra nauda. Pierādīt, ka vismaz vienam skolēnam līdzī bija ne mazāk kā 9 rubļi.

34.14. Pierādīt, ka eksistē 40-ciparu skaitlis, kas dalās ar 7 un kura cipari ir 38 vieninieki un divas nulles.

34.15. No sākuma uz papīra lapas uzrakstīts skaitlis 16. Ja uz lapas uzrakstīts skaitlis x , tad uz tā atļauts uzrakstīt arī skaitli x^2 , ja uz lapas uzrakstīti skaitļi x un y , tad uz tās atļauts uzrakstīt arī skaitli $|x - y| + 1$.

Vai var panākt, lai uz lapas būtu uzrakstīts skaitlis 1983 (un varbūt vēl kādi citi skaitļi) ?

7. klase

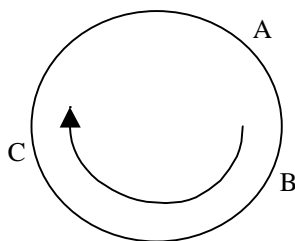
33.16. Dots, ka a un b – veseli pozitīvi skaitļi. Apskatām daļu $\frac{a}{b}$. Jānis pieskaitīja tās saucējam un skaitītājam vienu un to pašu veselu pozitīvu skaitli x un ieguva daļu, kas lielāka par sākotnējo, lielāka par sākotnējo. Juris pieskaitīja daļas $\frac{a}{b}$ skaitītājam vienu un to pašu veselu pozitīvu skaitli x un ieguva daļu, kas mazāka par sākotnējo. Pierādīt, ka vismaz viens no zēniem aprēķinos kļūdījās.

33.17. Dots, ka $a^2 - a - 1 = 0$ un $b^2 - b - 1 = 0$.
Pierādīt, ka $a^3 + b^3 = 2(a + b + 1)$.

33.18. Izliektā piecstūrī visu malu garumi ir 1 cm . Pierādīt, ka piecstūra laukums mazāks par 2 cm^2 .

33.19. a) Pierādīt, ka izliektā piecstūrī katra diagonāle īsāka par visu pārējo diagonāļu garumu summu,

b) vai var apgalvot, ka katrā izliektā piecstūrī katra diagonāle īsāka par $\frac{9}{10}$ no visu pārējo diagonāļu garumu summas?



33.5. zīm.

33.20. Pa apļa šoseju no dažādiem punktiem A , B un C vienlaicīgi vienā virzienā sāk braukt trīs automašīnas (skat. 33.5. zīm.).

Pēc stundas visas automašīnas vienlaicīgi apstājas tajā punktā, no kura sāka kustību. Šīs stundas laikā notika vairākas apdzīšanas (varbūt automašīnas pat neveica vienādu apļu skaitu), bet “divkāršu” apdzīšanu nebija, t.i. nevienu brīdi visas trīs automašīnas neatradās blakus.

Pierādīt, ka kopējais apdzīšanu skaits bija pāra skaitlis.

8. klase

33.21. Sakārtot pēc lieluma skaitļus

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}.$$

33.22. Trīs no aritmētiskās progresijas locekļiem ir 41, 113, 193. Atrast lielāko iespējamo diferences vērtību, ja zināms, ka tā ir vesels skaitlis.

33.23. $ABCD$ -- taisnstūris, P -- punkts tā iekšpusē. Pierādīt, ka

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

33.24. Dots trijstūris ABC . No viena punkta O atliekam vektorus $\overline{OK} = \overline{AB}$, $\overline{OM} = \overline{BC}$, $\overline{ON} = \overline{CA}$.

Pierādīt, ka trijstūra KMN laukums ir 3 reizes lielāks par trijstūra ABC laukumu.

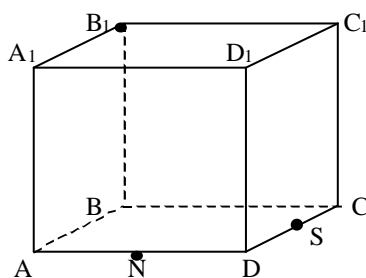
33.25. Plaknē dota slēgta lauza līnija. Tās visi posmi ir vienāda garuma, un ik divi blakus posmi ir savstarpēji perpendikulāri.

Vai šādai līnijai var būt tieši

- a) 7 posmi,
- b) 1983 posmi,
- c) 1982 posmi.

9. klase

33.26. Kuba $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ šķautnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ir paralēlas; $ABCD$ ir kuba skaldne. Konstruēt šķēlumu, kas iet caur B_1 un šķautņu AA_1 un CD viduspunktiem. Skat. 33.1. zīm.



33.1. zīm.

33.27. Funkcija $f(t)$ ir visur definēta. Dots, ka

a) $f(1) = 1$,

b) visiem x un visiem y izpildās vienādība

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y).$$

a) Aprēķināt $f(0)$,

b) pierādīt, ka $f(2x) = 4f(x)$,

c) aprēķināt $f(81)$.

33.28. Dots paralelograms $ABCD$. P -- punkts tā iekšpusē.

Pierādīt, ka $AP^2 + CP^2 - BP^2 - DP^2$ vērtība nav atkarīga no P stāvokļa.

33.29. Pierādīt, ka eksistē tāda sešstūra piramīda, kuru var paralēli projicēt pamata plaknē par trijstūri, četrstūri, piecstūri, sešstūri un septiņstūri.

33.30. Skudra pārvietojas pa skaitļu asi no punkta O pakāpeniski par

$$\pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{9}; \dots; \frac{1}{3^n}; \dots$$

Apzīmēsim skudras koordināti pēc n soļiem ar x_n .

a) Vai var būt, ka $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{4}$.

b) Vai var būt, ka kāds no virknes locekļiem ir vienāds ar $\frac{1}{4}$.

10. klase

33.31. Dots, ka $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$.

Aprēķināt atvasinājuma $f'(x)$ vērtību, ja $x = 2$.

33.32. Kvadrāta ortogonāla projekcija ir kvadrāts. Pierādīt, ka kvadrāta plakne paralēla projekciju plaknei.

33.33. Dots, ka $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Pierādīt, ka

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > 0.$$

33.34. Cik ciparu kopā izmantoti skaitļu 2^{1983} un 5^{1983} decimālajos pierakstos?

33.35. Kādu lielāko daudzumu skaitļu var izvēlēties no kopas $\{1, 2, 3, \dots, 1983\}$ tā, lai starp izvēlētajiem skaitļiem nepastāvētu nekāda vienādība $a + b = c$?

11. klase

33.36. Vai eksistē tāds x , ka $0 < \sin x < \frac{1}{10}$ un $\sin 3x > \frac{1}{3}$?

33.37. Katrai kuba virsotnei apskatām 3 šķautnes, kas no tās iziet, un plakni, kas iet caur to gala punktiem.

Cik daļās šīs plaknes sadala kubu?

33.38. Izliektā četrstūrī $ABCD$ $AC \perp BD$. Dots, ka $AB = 10$, $BC = 11$, $CD = 12$.

Aprēķināt AD .

33.39. Dots, ka $a + b + c$, $ab + ac + bc$ un abc ir veseli skaitļi. Pierādīt, ka

$$a^2 + b^2 + c^2, \quad a^2b + b^2a + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2, \quad a^3 + b^3 + c^3$$

ir veseli skaitļi.

33.40. Telpā dota slēgta lauza līnija. Tās visi posmi ir vienāda garuma, un ik trīs pēc kārtas ņemti posmi ir savā starpā visi pa pāriem perpendikulāri. Vai šādai līnijai var būt tieši:

- 1983 posmi,
- 1982 posmi ?