Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 35. OLIMPIĀDE

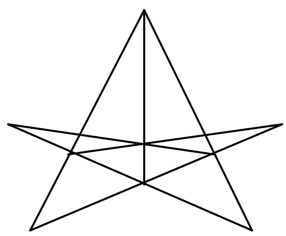
ATRISINĀJUMI

35.1. $13 = 2^2 + 3^2$, $74 = 7^2 + 5^2$, $36 = 6^2 + 0^2$, $145 = 9^2 + 8^2$, bet skaitli 83 prasītajā veidā izteikt nevar. Jāpārbauda tikai skaitļu kvadrāti no 0 līdz 9.

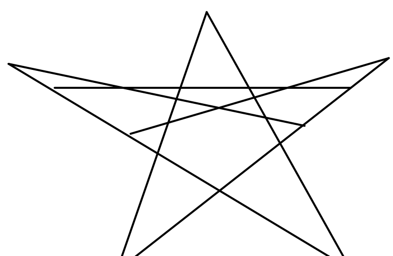
35.2. To var izdarīt, piemēram, šādi:

$$\begin{array}{ccccc} 9 & - & 5 & = & 4 \\ & & & & \times \\ 6 & : & 3 & = & 2 \\ & & & & = \\ 1 & + & 7 & = & 8 \end{array}$$

35.3 Piemēram, tā, kā parādīts 35.4 un 35.5. zīmējumos.



35.4. zīm.



35.5. zīm.

35.4. Ja skaitļa *n* pierakstā ir *k* divnieku, tātad arī 7*k* vieninieki, tad tā ciparu summa ir $2k + 7k = 9k$; tātad šis skaitlis dalās ar 3. Tā kā 199 ar 3 nedalās, tad arī $n + 199$ ar 3 nedalās.

35.5. Piemēram, tā, kā parādīts 35.6. zīm.

8.	X	X	X
7.	X	X	
6.	X	X	
5.	X		X
4.	X		X
3.		X	X
2.		X	X
1.	X	X	X

35.6. zīm.

35.6. Garākā mala nav īsāka par 7 (citādi perimetrs nepārsniegtu 18) un nav garāka par 9 (citādi perimetrs būtu lielāks par 20). Iegūstam šādus variantus {pirmo rakstām garākās malas garumu):

$7+7+6$,
$8+8+4$,
$8+7+5$,
$8+6+6$,
$9+9+2$,
$9+8+3$,
$9+7+4$,
$9+6+5$.

35.7. Tā kā $\frac{640}{360}=\frac{16}{9}$, un $\frac{16}{9}$ ir nesaīsināma daļa, tad novilktā diagonāle sastāv no 40 taisnstūru 16×9 diagonālēm.

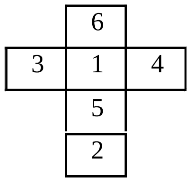
Katra šāda taisnstūra diagonāle tā iekšpusē neiet caur rūtiņu virsotnēm. Krustojot katru vertikāli (tādu ir 8) un katru horizontālo līniju (tādu ir 15), tā ieiet jaunā rūtiņā; tātad tā krusto $1+8+15=24$ rūtiņas. Tātad kopējais šķērsoto rūtiņu skaits ir $24\times 40=960$.

35.8. a) Jā, var; ņemam 2 negatīvus skaitļus un 7 pozitīvus skaitļus. Tad negatīvo reizinājumu skaits būs $2\cdot 7=14$.
b) Nē, nevar. Ja mēs ņemsim x negatīvus skaitļus un $(9-x)$ pozitīvus skaitļus, tad iegūsim $x\cdot(9-x)$ negatīvus reizinājumus. Tas nozīmē, ka būtu jāizpildās vienādībai

$$x\cdot(9-x)=17.$$

Tā kā 17 ir pirmskaitlis, tad $x=1$ vai $x=17$. Abi gadījumi neder.

35.9. a) Piemēram, tā, kā parādīts 35.7. zīm. (kuba virsmas izklātnē).



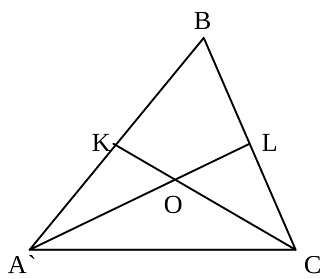
35.7. zīm.

Blakus pāri būs $(4; 5)$ un $(2; 3)$.

Katrai skaldnei ir tikai viena cita skaldne -- pretējā -- ar kuru tai nav kopējas šķautnes. Tātad skaitļiem 2, 3, 4, 5, kam ir pa diviem skaitļiem, kas no katra atšķiras par 1, noteikti vismaz uz vienas kaimiņu skaldnes būs skaitlis, kas no tā atšķiras par 1. Tā kā ir četri šādi skaitļi, tad būs vismaz divi tādu skaldņu pāri.

35.10. No katrām divām pēc kārtas ņemtām spēlēm Jānis vismaz vienā piedalījās. Tāpēc spēļu skaits nepārsniedz $2 \cdot 7 + 1 = 15$ un var būt tikai tad, ja Jānis piedalījies 2., 4., 6., 8., 10., 12., 14. spēlēs un visās zaudējis. Tā kā Pēteris piedalījies 15 spēlēs, tad pavisam notika 15 spēles. Tātad spēļu skaits ir 15, un Pēteris uzvarējis vismaz pirmajās četrpadsmit no tām (citādi viņš nebūtu piedalījies visās spēlēs). Tātad septītajā spēlē Pēteris uzvarēja Andri

35.11. Novelkam bisektrises AL un CK ; skat. 35.8. zīm.



35.8. zīm.

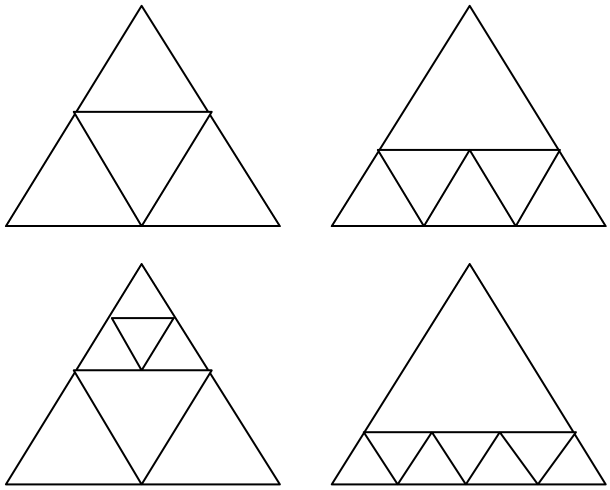
Tad iegūstam:

$$\angle AOC = 180° - (\angle OAC + \angle OCA) =$$
$$180° - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) =$$
$$180° - \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) =$$
$$180° - \frac{1}{2}(180° - 60°) = 120° .$$

Atbilde: leņķis starp bisektrisēm ir $120°$.

35.12. Ievērosim, ka $3193 = 31 \cdot 103$, un 31 un 103 ir pirmskaitļi. Pildspalvas jaunā cena ir skaitļa 3193 dalītājs, kas ir ne mazāks par 25 un mazāks par 50. Vienīgais šāds skaitļa 3193 dalītājs ir skaitlis 31. Tātad pildspalvas jaunā cena ir 31 kap.

35.13. Zīmējumā parādīts, kā trijstūri sagriezt četros, sešos, septiņos un astoņos trijstūros.



35.9. zīm.

Tā kā vienu vienādmalu trijstūri var sagriezt četros un tādejādi to skaitu palielināt par 3, tad no 8 trijstūriem var pakāpeniski iegūt 11, 14, 17, …, 1985 trijstūros (jo $1985 - 8 = 1977$ dalās ar 3).

39.14. Apskatāmo viencipara skaitļu ir 5, divciparu skaitļu ir $5^2 = 25$, trīsciparu skaitļi ir $5^3 = 125$, četrciparu skaitļi ir $5^4 = 625$, piecciparu skaitļu ir $5^5 = 3125$. Tā kā $5 + 25 + 125 + 625 = 780 < 1985$, tad n ir piecciparu skaitlis, pie tam starp piecciparu skaitļiem tas ir ar kārtas numuru $1985 - 780 = 1205$. Piecciparu skaitļu, kas sākas ar 1, ir $5^4 = 625$, tātad n sākas ar 2, un starp šiem skaitļiem tā kārtas numurs ir$1205 - 625 = 580$. Tādu skaitļu ar otro ciparu 1 ir $5^3 = 125$; tāpat skaitļu ar otro ciparu 2, 3 un 4 ir pa 125. Tā kā $4 \cdot 125 = 500 < 580$, tad n otrais cipars ir 5, un starp šiem skaitļiem tā kārtas numurs ir $580 - 500 = 80$. Līdzīgi turpinot, iegūstam, ka $n = 25415$.

39.15. Tādi skaitļi ir, piemēram,

$$-2,\ -500,\ \underbrace{1,1,\ldots,1}_{750},\ \underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{248}.$$

39.16. Izmantojot skaitļu kvadrātu starpības formulu, iegūstam

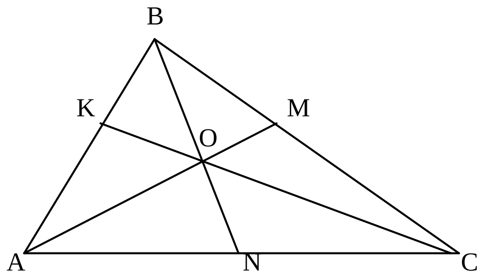
$$\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{9^2-1}{9^2}=$$

$$\frac{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6\cdot5\cdot7\cdot6\cdot8\cdot7\cdot9\cdot8\cdot10}{2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot6^2\cdot7^2\cdot8^2\cdot9^2}=\frac{5}{9}.$$

39.17. Apgalvojumi seko no nevienādībām

$$1-(1-a)\cdot(1-b)=1-(1-a-b+ab)=$$
$$a+b-ab=b+a\cdot(1-b)>b;$$
$$1-(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)>1-1\cdot(1-c)=c.$$

39.18. Skat. 35.10. zīm.



35.10. zīm.

Summējot trijstūra nevienādības

$$AO+ON>AN,\quad CO+OM>CM,\quad BO+OK>BK,$$

iegūstam

$$AM+BN+CK>AN+CM+BK.$$

Līdzīgi pierādām, ka

$$AM+BN+CK>NC+MB+KA.$$

Tātad

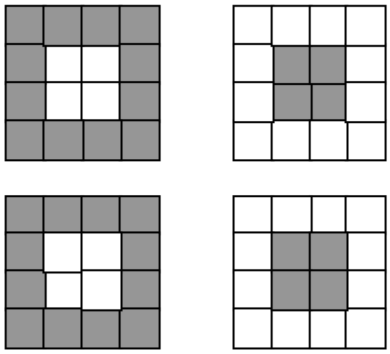
$$AM+BN+CK>\frac{1}{2}\big((AN+CM+BK)+(NC+MB+KA)\big)=$$
$$\frac{1}{2}(AB+BC+CA).$$

35.19. Skaitlis $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ dalot ar 4, dod atlikumu 3. Taču naturālu skaitļu kvadrāts, dalot ar 4 var dot tikai atlikumus 0 vai 1.

Tiešām, ja $n = 2k$, tad $n^2 = 4k^2$ dalās ar 4;

Ja $n = 2k + 1$, tad $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ dalot ar 4, dod atlikumā 1.

35.20. a) Jā, var; piemēram, ja kubiņus pa slāņiem izvietojam tā, kā parādīts 35.11. zīmējumā.



35.11. zīm.

b) Nē, nevar. Pieņemsim no pretējā, ka to var izdarīt. Aplūkosim vienu baltu kubiņu. Ejam, sākot no tā, pa baltajiem kubiņiem. Tā kā katram kubiņam ir tieši 2 kaimiņi tāda pašā krāsā kā viņš, tad mēs atgriezīsimies atpakaļ sākotnējā kubiņā. Šajā brīdī paralēli katrai kuba šķautnei esam pavirzījušies vainā virzienā tikpat, cik otrā, tātad esam apstaigājuši pāra skaitu kubiņu. Līdzīgu spiedumu var izdarīt par jebkuru vēl neapstaigāto kubiņu, utt. Tātad visi 27 kubiņi sadalās galīgā skaitā kontūru, un katrā kontūrā kubiņu ir pāra skaits -- pretruna.

35.21. Ievietojot $x = 8 - y$ otrajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu $y^2 - 8y + 15 = 0$. Sistēmas atrisinājums ir $(3,\ 5), (5,\ 3)$.

35.21. Aritmētiskās progresijas pirmie divi locekļi var būt vienādi ar

a) $a_1 = 1 \quad a_2 = 6, \quad d = 5.$ Tātad

$a_n + a_{n+1} = 1 + 5(n-1) + 1 + 5n = 10n - 3 = 685.$ No šejienes $n = 68{,}8$, kas nav naturāls skaitlis.

b) $a_1 = 2, \quad a_2 = 5, \quad d = 3.$ Tātad

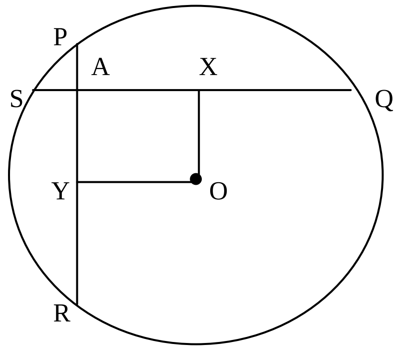
$a_n + a_{n+1} = 2 + 3(n-1) + 2 + 3n = 6n + 1 = 685$. No šejienes $n = 114$.

c) $a_1 = 3, \quad a_2 = 4, \quad d = 1$. Tātad

$a_n + a_{n+1} = 3 + (n-1) + 3 + n = 2n + 5 = 685$. No šejienes $n = 340$.

Atbilde: Aritmētiskās progresijas pirmais loceklis $a_1 = 2, \quad d = 3,$ vai $a_1 = 3, \quad d = 1$.

35.23. Skat. 35.2.zīm.



35.2. zīm.

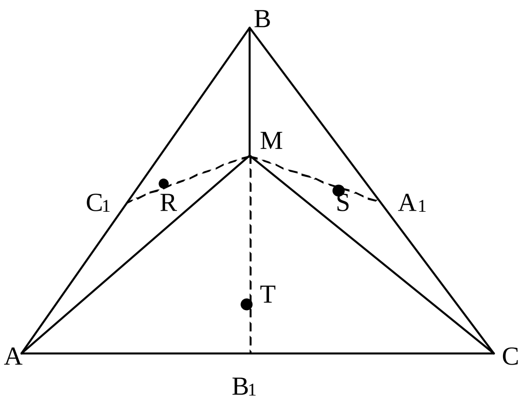
No punkta O velkam perpendikulus OX un OY.

No Pitagora teorēmas seko ka,

$$SQ^2 + PR^2 = 4\left(SX^2 + PY^2\right) =$$
$$= 4\left(SO^2 - OX^2 + OP^2 - OY^2\right) =$$
$$= 8r^2 - 4\left(OX^2 + OY^2\right) =$$
$$= 8r^2 - 4 \cdot OA^2,$$

kas ir fiksēts lielums.

35.24. Skat.35.3.zīm.



35.3. zīm.

Ar A_1, B_1, C_1 apzīmēsim malu viduspunktus. No mediānu krustpunktu īpašībām seko, ka $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{MR} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{MC_1}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1A_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Līdzīgi $\overrightarrow{TS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{RT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Tas nozīmē, ka trijstūris *RSM* ir līdzīgs trijstūrim *CAB* ar līdzības koeficientu $\frac{1}{3}$, tātad tas ir regulārs.

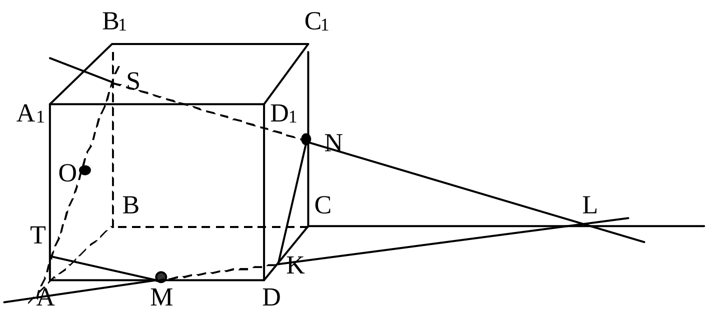
35.25. Ierakstīsim tabulas pirmajā rindā tādus veselus skaitļus *a, b, c*, lai summa būtu prasītais skaitlis. Otrajā rindā ierakstām skaitļus *d, e, f* tādus, ka rindiņā ierakstīto skaitļu summa būtu prasītais skaitlis. Skat. 35.4. zīm.

a	b	c
d	e	f
g	h	*

35.4. zīm.

Skaitļus *g* un *h* izvēlamies tādus, lai pirmās un otrās kolonas summas būtu prasītās. Zvaigznītes vietā ierakstām skaitli, kurš summā ar *g* un *h* dot prasīto summu; tad arī summa trešajā kolonnā būs prasītais.

35.26. Skat. 35.5. zīm.



35.5. zīm.

Apzīmēsim šķēlējplakni ar α, bet plakni, kas iet caur AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 viduspunktiem -- ar β. Tā kā $\beta // ABCD$, tad α šķēluma līnijas ar β un *ABCD* ir paralēlas. Bet α šķēluma līnija ar β ir taisne *ON*. Tātad taisne *t*, kas vilkta caur *M* paralēli *ON*, ir α šķēluma līnija ar *ABCD*. Tālākā konstrukcijas gaita:

$$K = t \cap CD,$$
$$L = t \cap BC,$$
$$S = LN \cap BB_1$$
$$T = SO \cap AA_1.$$

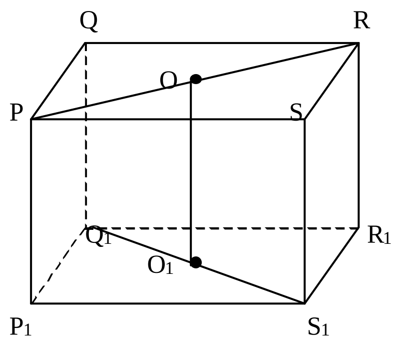
Meklējamais šķēlums ir *MKNST*.

35.27. Nevienādību pārveidojam formā
$$\frac{(x+1)(x-3)^3\sqrt{5-x}}{(x-2)(x-3)} \geq 0.$$

Ievērosim, ka $x \leq 5$ un $x \neq 3$. Tālāk nevienādību pārveidojam šādi:
$$\frac{(x+1)(x-3)^2}{x-2} \geq 0.$$

Risinot ar intervālu metodi un ievērojot iepriekšējās nevienādības, iegūstam:
$$x \in (-\infty, -1] \cup (2, 3) \cup (3, 5].$$

35.28. Skat. 35.6. zīm.



35.6. zīm.

Atradīsim skaldņu *PQRS* un $P_1Q_1R_1S_1$ centrus O un O_1 kā nogriežņu PR un Q_1S_1 viduspunktus. Tālāk konstruējam PP_1, kas vienāds un paralēls nogrieznim OO_1, un līdzīgi velkot nogriežņus SS_1, RR_1, QQ_1, iegūstam visa paralēlskaldņa virsotnes.

35.29. a) Ja $x = 1$, tad $y = 1$;

ja $x > 1$, tad $2^x - 1 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ un šāds skaitlis nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

b) Pārveidojam doto vienādību formā $2^x = (y+1)(y^2 - y + 1)$; tātad katrs reizinātājs ir divnieka pakāpe:
$$\begin{cases} y+1 = 2^t \\ y^2 - y + 1 = 2^u. \end{cases}$$

Taču $y^2 - y + 1$ vienmēr ir nepāra skaitlis un tas nevar būt vienāda ar divnieka pakāpi; izņēmuma gadījumā, kad $u = 0$, $y = 1$, iegūstam atrisinājumu $x = 1$, $y = 1$.

35.30. Mazākā iespējamā vērtība tiks iegūta, ja visi skaitļi, kas lielāki par 1, atradīsies daļas saucējā; tas ir iespējams:

$$(\ldots(((1:2):3):4)\ldots):9=\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot9}.$$

Ievērosim, ka skaitlis 2 vienmēr atradīsies daļas saucējā; bet pārējos skaitļus ir iespējams novietot daļas skaitītājā -- tā arī būs maksimālā daļas vērtība:

$$1:1:(2:(\ldots((3:4):5):6)\ldots:9)=\frac{1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot9}{2}.$$

35.31. Izpildot identiskus pārveidojumus, iegūstam

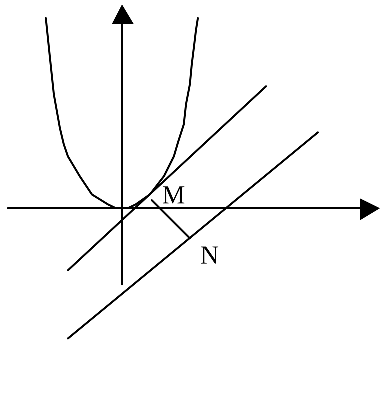
$$\mathrm{tg}(\alpha-45°)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}45°}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{g}45°}=\frac{\mathrm{tg}\alpha-1}{1+\mathrm{tg}\alpha}=$$

$$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

35.32. Novelkam caur t un s paralēlas plaknes α un β; ar OO_1 apzīmējam t un s kopīgā perpendikula galapunktus, ar A_1 un B_1 -- punktu A un B ortogonālās projekcijas plaknē β, ar A_2 un B_2 -- punktu A un B ortogonālās projekcijas uz taisnes s.

Pēc triju perpendikulu teorēmas $A_1A_2\perp s$ un $B_1B_2\perp s$. Taisnleņķa trijstūros AA_1A_2 un BB_1B_2 ir vienādas hipotenūzas AA_2 un BB_2, kā arī katetes AA_1 un BB_1; tāpēc arī $A_1A_2=B_1B_2$. Tāpēc taisnleņķa trijstūri $O_1A_2A_1$ un $O_1B_2B_1$ ir kongruenti (pēc katetes un šaurā leņķa). Tāpēc $O_1A_1=O_1B_1$, bet tad arī $OA=OB$.

35.33. Skat. 35.7. zīm.



35.7. zīm.

Atradīsim pieskari parabolai, kas paralēla taisnei $y=x-4$. Tad attālums starp pieskaršanās punktu M un tā projekciju N uz taisnes $y=x-4$ būs meklētais mazākais attālums.

Lai atrastu punktu *M*, jāatrod punkts, kurā funkcijas atvasinājums ir 1.

$$\left(x^2\right)' = 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{4}.$$

Rakstām taisnes vienādojumu, kas iet caur punktu *M* perpendikulāri taisnei $y = x - 4$:

$$y - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y + x - \frac{3}{4} = 0.$$

Lai atrastu punkta *N* koordinātes risinām sistēmu

$$\begin{cases} y + x + \frac{3}{4} = 0 \\ y = x - 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2\tfrac{3}{8},\ y = -1\tfrac{5}{8}.$$

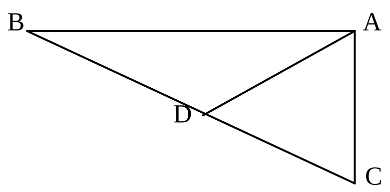
Tālāk atrodam attālumu starp punktiem *M* un *N*:

$$MN = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 2\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + 1\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{15}{8}\sqrt{2}.$$

35.34. Pieņemsim, ka vienkrāsains vienādsānu trijstūris neveidojas. Tā kā virsotņu skaits ir nepāra skaitlis, tad atradīsies divas sekojošas virsotnes, kas nokrāsotas vienā krāsā (teiksim melnā); apzīmēsim tās ar A_1 un A_2. Tad virsotnēm A_{11} un A_3 jābūt baltām; pretējā gadījumā veidojas vienkrāsaini trijstūri $A_1A_2A_3$ vai $A_1A_2A_{11}$. Taču neatkarīgi no tā, kādā krāsā būs nokrāsots punkts A_7, viens no trijstūriem $A_1A_2A_7$ vai $A_{11}A_3A_7$ būs vienkrāsains.

35.35. Tas ir skaitlis 720721.

35.36. Skat. 35.8. zīm.



35.8. zīm.

Tā kā trijstūris *ABD* ir vienādsānu, tad

$$\angle BDA = 180° - (\angle DAB + \angle DBA) = 180° - (30° + 30°) = 120°.$$

Tas nozīmē, ka $\angle ADC = 60°$. Vienādsānu trijstūrī *ADC* viens no leņķiem ir $60°$; tātad tas ir regulārs. No šejienes seko, ka $\angle BCA = 60°$ un $\angle BAC = 90°$.

35.37. Viegli pierādīt, ka n jābūt pāra skaitlim; tiešām, ja daudzskaldnim ir s šķautņu, tad jāizpildās vienādībai $3n = 2s$. No šejienes seko, ka n ir pāra skaitlis.
Skaidrs, ka $n \geq 4$. Piemēru ar $n = 4$ dod trijstūra piramīda.
Ja $n = 2k, k \geq 3$, tad ar pamatiem savienojam divas regulāras k-stūru piramīdas, un izveidosies n-skaldnis, kam visas skaldnes ir trijstūri.
Atbilde: n -- jebkurš pāra skaitlis, kas lielāks par 2.

35.38. Izpildot identiskus pārveidojumus, var pārbaudīt, ka šī izteiksmes vērtība ir vienāda ar 0.

35.39. Ievērosim, ka $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2$. Tāpēc

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx - (x_1 + x_2)\int_{x_1}^{x_2} xdx + x_1 x_2 \int_{x_1}^{x_2} dx =$$
$$\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x_1}^{x_2} - (x_1 + x_2)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{x_2} + x_1 x_2 \cdot x\Bigg|_{x_1}^{x_2} =$$
$$\frac{x_2^3 - x_1^3}{3} - (x_1 + x_2)\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + x_1 x_2 (x_2 - x_1) =$$
$$\frac{1}{6}(x_1 - x_2)^3.$$

35.40. Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka jebkuru naturālu skaitli, kas lielāks par 11, var izteikt formā $n = 2a + 3b$, kur a un b -- naturāli skaitļi, kas lielāki par 1. Protams, ka skaitļi $2a$ un $3b$ ir salikti.
Indukcijas bāze: $12 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2, \quad 13 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3$.
Induktīvā pāreja: $n \to n + 2$.
Ja $n = 2a + 3b$, tad $n + 2 = 2(a + 1) + 3b$.