

Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 35. OLIMPIĀDE

4. klase

35.1. Kurus no sekojošiem skaitļiem var uzrakstīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu ?

13; 74; 83; 36; 145.

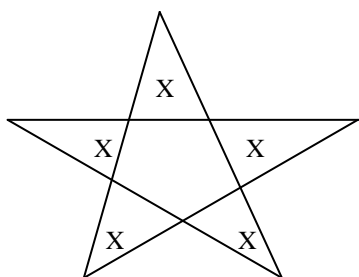
Atbildes pamatot.

35.2. Ierakstīt kvadrātiņos dažādus nenulles ciparus tā, lai iegūtu pareizas vienādības (pietiek parādīt vienu veidu kā to izdarīt):

$$\begin{array}{ccc} \square - \square = \square \\ \square \cdot \square = \square \\ \square + \square = \square \end{array}$$

35.1. zīm.

35.3. Piecus taisnes nogriežņus var novilkt tā, ka veidojas 5 trijstūri (sk. 35.2. zīm.).



35.2. zīm.

Piezīme. Mēs uzskaitām tikai tādus trijstūrus, kas paši nesastāv no vairākām daļām.

Pierādiet, kā novilkt 7 taisnes nogriežņus tā, lai veidotos

- a) 10 trijstūri,
- b) 11 trijstūri .

35.4. Skaitļa n pierakstā izmantoti tikai cipari 1 un 2. Vieninieku ir 7 reizes vairāk nekā divnieku. Pierādīt, ka $n + 199$ nedalās ar 3.

35.5. Astonstāvu mājā ir 3 lifti. Visi lifti apstājas pirmajā stāvā un astotajā stāvā; katrs lifts bez tam var apstāties vēl četros no šiem pārējiem stāviem. Kā iekārtot liftu apstāšanos, lai no katra stāva varētu nokļūt uz katru citu, lietojot tikai vienu liftu ?

5. klase

35.6. Atrodiet visus trijstūrus, kuriem katras malas garums izsakās ar veselu skaitu centimetru, bet visu malu garumu summa ir 20 cm.

35.7. Rūtiņu lapā uzzīmēts taisnstūris, kura malas iet pa rūtiņu līnijām, bet izmēri ir 640×360 rūtiņas. Novilkta tā diagonāle. Caur cik rūtiņām iet šī diagonāle? (Diagonāle iet caur rūtiņu, ja tā satur šīs rūtiņas iekšējos punktus.)

35.8. Vai var atrast 9 skaitļus tā, lai starp visiem 36 iespējamajiem to reizinājumiem pa divi tieši 14 būtu negatīvi, bet citi -- pozitīvi?

Bet tā, lai tieši 17 reizinājumi būtu pozitīvi un 19 reizinājumi -- negatīvi ?

35.9. Uz kuba skaldnēm uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 6 (uz katras skaldnes -- cits skaitlis). Par blakus skaldnēm saucamas divas tādas skaldnes, kurām ir kopīga mala.

a) parādīt, ka skaitļus var uzrakstīt tā, ka ir tikai divi pāri blakus skaldņu, uz kurām uzrakstītie skaitļi atšķiras par 1,

b) pierādīt, ka vismaz divi tādi pāri noteikti ir.

35.10. Jānis, Pēteris un Andris spēlē galda tenisu. Katrā spēlē piedalās divi no viņiem, bet trešais stāv malā un vēro. Tas, kurš kādā spēlē zaudējis, iet malā un dod vietu tam zēnam, kurš šīs spēles laikā skatījies.

Zināms, ka Jānis piedalījies 7 spēlēs, bet Pēteris -- 15 spēles

Cik spēļu pavisam izspēlēja ?

Kas uzvarēja un kas zaudēja septītajā spēlē ?

6.klase

35.11. Trijstūrī ABC leņķa B lielums ir 60° . Kādā leņķī krustojas leņķu A un C bisektrises ?

35.12. Pildspalva maksāja 50 kapeikas. Tās cenu pazemināja ne vairāk kā divas reizes. Pēc tam visas kioskā esošās pildspalvas pārdeva par 31 rubli 93 kapeikām. Kāda bija pildspalvas jaunā cena ?

35.13. Pierādiet, ka vienādmalu trijstūri var sagriezt

- a) četros,
- b) sešos,
- c) septiņos,
- d) 1985 vienādmalu trijstūros.

Piezīme. Starp griežot iegūtajiem trijstūriem var būt gan dažādi, gan vienādi.

35.14. Apskatām visus veselos un pozitīvos skaitļus, kas nesatur citus ciparus kā 1; 2; 3; 4 un 5. Sakārtosim tos augošā secībā un ar n apzīmējam skaitli, kas šajā sarakstā atrodas 1985-ajā vietā.

- a) cik ciparu ir skaitlim n ?
- b) atrast skaitli n .

35.15. Atrast 1000 veselus skaitļus, kuri reizinājums ir 1000, bet summa ir 0. Pietiek atrast vienu tādu skaitļu komplektu.

7.klase

35.16. Aprēķināt izteiksmes vērtību:

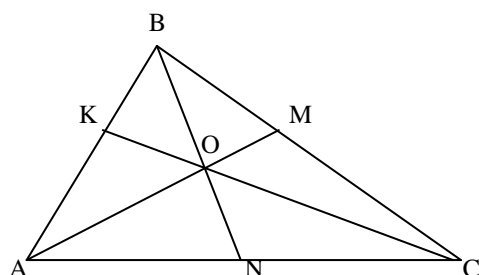
$$\frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdot \frac{4^2 - 1}{4^2} \cdot \frac{5^2 - 1}{5^2} \cdot \dots \cdot \frac{9^2 - 1}{9^2} .$$

35.17. Dots, ka a , b un c -- pozitīvi skaitļi, kas mazāki par 1 .

- a) pierādīt, ka $1 - (1 - a)(1 - b) > b$,
- b) pierādīt, ka $1 - (1 - a)(1 - b)(1 - c) > c$.

35.18. Nogriežņi AM , BN un CK krustojas vienā punktā O . Pierādīt, ka

$$AM + BN + OK > \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \text{ (skatīt 35.3. zīm.)}.$$



35.3. zīm.

35.19. Pierādīt, ka

- 1111 nav vesela skaitļa kvadrāts,
- neviens skaitlis, kas sastāv tikai no vieniniekiem satur vairāk par vienu ciparu, nav vesela skaitļa kvadrāts.

35.20. Katru no dotajiem kubiņiem var nokrāsot baltu vai melnu.

- Doti 64 kubiņi. Pierādīt, ka daļu no tiem var nokrāsot baltus, bet daļu -- melnus un izveidot no tiem kubu ar izmēriem $4 \times 4 \times 4$ tā, ka katram izmantotajam kubiņam tieši 2 kaimiņi ir tāda pašā krāsā kā viņš. (Divus kubiņus saucam par kaimiņiem, ja tiem ir kopīga skaldne.)
- Doti 27 kubiņi. Vai tos var nokrāsot un pēc tam sastādīt no tiem kubu ar izmēriem $3 \times 3 \times 3$ tā, lai izpildītos tāda pati prasība kā a) variantā ?

8. klase

35.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 79. \end{cases}$$

35.22. Aritmētiska progresija sastāv no naturāliem skaitļiem. Tās divu pirmo locekļu summa ir 7, bet divu pēdējo locekļu summa ir 685. Noteikt šīs progresijas pirmo locekli un diferenci.

35.23. Caur punktu A riņķa līnijas iekšpusē, kas nav novilkta divas savstarpēji perpendikulāras hordas. Pierādīt, ka to garumu kvadrātu summa nav atkarīga no tā, kurš savstarpēji perpendikulāru hordu pāris tiek aplūkots. (Piezīme: varam pieņemt par zināmu faktu, ka nogrieznis, kas savieno riņķa līnijas centru ar hordas viduspunktu, ir perpendikulārs šai hordai.)

35.24. Regulāra trijstūra ABC iekšpusē ņemts punkts M . Ar R, S, T apzīmējam trijstūru AMB, BMC, CMA mediānu krustpunktus. Pierādīt, ka RST ir regulārs trijstūris.

35.25. Kvadrātveida tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts skaitlis (ne obligāti vesels) tā, ka katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa ir vesels skaitlis. Pierādīt, ka tabulā ierakstītos skaitļus var aizvietot ar veseliem skaitļiem tā, lai rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas nemainītos.

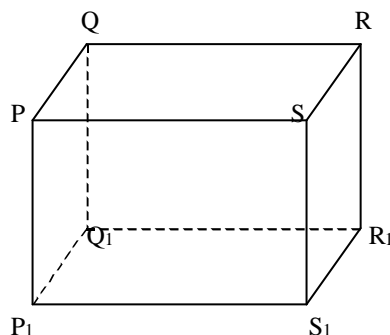
9. klase

35.26. Kuba $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ šķautnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ir paralēlas; $ABCD$ ir kuba skaldne. Konstruēt zīmējumā kuba šķēlumu ar plakni, kas iet caur šķautņu AD un CC_1 viduspunktiem un skaldnes $AA_1 B_1 B$ centru.

35.27. Atrisināt nevienādību

$$\frac{(x+1)(x-3)^3 \sqrt{5-x}}{x^2 - 5x + 6} \geq 0.$$

35.28. Plaknē bija uzzīmēts paralēlskaldņa attēls paralēlajā projekcijā (skat. 35.1. zīm.).



35.1. zīm.

Pēc tam nodzēsa visu zīmējumu, atstājot tikai punktus P, R, Q_1, S_1 . Kā atjaunot visu attēlu?

35.29. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumus

a) $2^x - 1 = y^2,$

b) $2^x - 1 = y^3.$

35.30. Kādu vislielāko un kādu vismazāko vērtību var iegūt, ievietojot iekavas izteiksmē

$$1:2:3:4:5:6:7:8:9 ?$$

Pamatojiet savu atbildi.

10. klase

35.31. Dots, ka α ir pirmā kvadranta leņķis. Pierādīt vienādību

$$\operatorname{tg}(a - 45^\circ) = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

35.32. Telpā dotas divas šķērsas taisnes t un s . Uz taisnes t atzīmēti divi punkti A un B , kuru attālumi līdz s ir vienādi savā starpā.

Pierādīt, ka punkti A un B ir simetriski novietoti attiecībā pret taisni t un s kopīgo perpendikulu.

35.33. Punkts M ir punkts uz parabolas -- funkcijas $y = x^2$ grafika. N ir punkts uz taisnes -- funkcijas $y = x - 4$ grafika. Atrast MN mazāko iespējamo vērtību.

35.34. Katra no regulāra 11-stūra virsotnēm nokrāsota vai nu baltā, vai melnā krāsā. Pierādīt, ka var atrast trīs vienādā krāsā nokrāsotus punktus, kas atrodas vienādsānu trijstūra virsotnēs.

35.35. Sešciparu naturāla skaitļa N pirmais cipars ir 7, piektais cipars ir 2; sestais cipars ir nepāra. Dalot skaitli N ar 3, 4, 7, 9, 11, 13, iegūst vienādus atlikumus. Atrast N .

11. klase

35.36. Trijstūrī ABC dots, ka $\angle ABC = 30^\circ$. Caur punktu A novilkta taisne t , kas sadala trijstūri ABC divos vienādsānu trijstūros. Atrast $\angle BAC$ un $\angle BCA$.

35.37. Izliektam daudzskaldnim ir n skaldnes, un tās visas ir trijstūri. Kāda var būt n vērtība?

35.38. Pierādīt, ka izteiksmes $\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x - \cos^3 2x$ nav atkarīga no mainīgā x lieluma.

35.39. Dots, ka $f(x) = x^2 + px + q$ (p un q -- konstanti skaitļi).

Dots, ka vienādojumam $x^2 + px + q$ ir saknes x_1 un x_2 , pie tam $x_1 < x_2$. Pierādīt, ka

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot (x_1 - x_2)^3.$$

35.40. Pierādīt, ka naturālu skaitli, kas lielāks par 11, var izteikt kā divu saliktu naturālu skaitļu summu.