Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

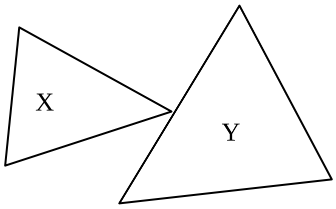
LATVIJAS RAJONU 36. OLIMPIĀDE

4. klase

36.1. Cik dažādus četrciparu skaitļus var izveidot no cipariem 1, 9, 8, 6, katru no tiem izmantojot tieši vienu reizi?

36.2. Ciema forma ir taisnstūris. Taisnstūra kontūra ir šoseja. Ciems ar ielām sadalīts 12 kvadrātiskos kvartālos; katra kvartāla malas garums ir 200 m. Visu ielu kopējais garums ir 3200 m (neskaitot šosejas posmus). Atrast šosejas garumu.

36.3. Teiksim, ka trijstūris *X* balstās uz trijstūra *Y*, ja viena no *X* virsotnēm atrodas kādas *Y* malas iekšējā punktā (ne virsotnē), bet citu kopēju punktu trijstūriem *X* un *Y* nav (skat. 36.1. zīm.).



36.1. zīm.

Vai var uzzīmēt

a) tādus trijstūrus *A*, *B*, *C*, ka *A* balstās uz *B*, *B* balstās uz *C* un *C* balstās uz *A*;

b) tādus trijstūrus *A*, *B*, *C* un *D*, ka *A* balstās uz *B*, *B* balstās uz *C*, *C* uz *A*, *C* uz *D*, *A* uz *D*, *B* uz *D*;

c) tādus trijstūrus *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ka *A* balstās uz *B*, *C*, *D* un *E*, *B* balstās uz *C*, *D* un *E*, *C* balstās uz *D* un *E*, *D* balstās uz *E*?

36.4. Kvadrāts sastāv no 1000×1000 rūtiņām. Tā kreisajā apakšējā stūrī atrodas šaha zirdziņš. Pierādīt, ka ar to var izdarīt pēc kārtas 999 gājienus tā, ka zirdziņš katrā rindiņā un katrā kolonnā būs atradies tieši vienu reizi (ieskaitot sākuma pozīciju).

36.5. Rindā uzrakstīti skaitļi

1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Vai var starp katriem diviem blakus esošiem cipariem ievietot "+" vai "-" zīmi tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu a) 30, b) 31 ?

5. klase

36.6. Uz skaitļu ass atzīmēti vairāki punkti. To attēloto skaitļu summa ir 243. Visus punktus pabīdīja par 3 vienībām pa labi. Vai to skaitļu summa, kurus attēlo jauniegūtie punkti, var būt 1986? Bet 1987?

36.7. Pionieru nometnē atpūšas 100 bērni. No tiem 95 ir bijuši Rīgā, 85 Liepājā, 75 Cēsīs un 65 Ventspilī. Pierādiet, ka vismaz 20 bērni ir bijuši visās četrās pilsētās.

36.8. Ja dots naturāls skaitlis, tad ar vienu operāciju atļauts tajā atrast vislielāko ciparu, pareizināt to ar 2 un aizvietot visās vietās šo lielāko ciparu ar iegūto reizinājumu. No sākuma dots skaitlis 37. Izpildām aprakstīto operāciju; ar iegūto skaitli atkal izpildām aprakstīto operāciju; ; ar iegūto skaitli atkal izpildām aprakstīto operāciju; utt. Cik ciparu būs skaitlim, ko iegūs pēc 1000 operāciju izpildes?

36.9. Vai eksistē tāds divdesmitstūris, ka uz katras taisnes, uz kuras atrodas viena tā mala, atrodas vēl otra tā mala?

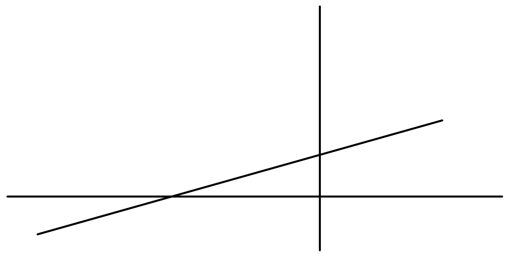
36.10. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Rūtiņas malas garums ir 1. Vienā rūtiņā atrodas figūra "žirafe". Ar vienu gājienu žirafe, kas atrodas patvaļīgā rūtiņā *A*, var pāriet vai nu uz rūtiņu, kas atrodas vienu vienību pa labi vai kreisi un trīs vienības uz leju vai augšu no *A*, vai arī uz rūtiņu, kas atrodas divas vienības pa labi vai kreisi un divas trīs vienības uz leju vai augšu no *A*.

Vai žirafe, daudzkārt izdarot gājienus, var nonākt rūtiņā, kurai ir kopīga mala ar to, kurā žirafe atradās sākumā?

6. klase

36.11. Jānis uzzīmēja funkcijas $y = 3x + 3$ grafiku. Ļaunais burvis nodzēsa koordinātu asu bultiņas, apzīmējumus un varbūt aizstāja zīmējumu ar spoguļattēlu, vai pagrieza to (skat. 36.2. zīm.).

Atjaunojiet zīmējumā visu nodzēsto !



36.2. zīm.

36.12. Uzzīmēt divus astoņstūrus tā, ka katra no pirmā astoņstūra malām krusto katru no otrā astoņstūra malām.

36.13. No skaitļa 1985 atņēma tā ciparu summu, no rezultāta -- tā ciparu summu, utt.

a) Pierādiet, ka noteikti kādreiz iegūsim viencipara skaitli.

b) Kāds tas būs ?

36.14. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Pierādiet, ka tajā var nokrāsot 9 rūtiņas tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:

a) nevienā kvadrātā 2×2 rūtiņas nav nokrāsots vairāk par divām rūtiņām,

b) lai kuru vēl nenokrāsotu rūtiņu mēs nokrāsosim, a) īpašība vairāk nebūs spēkā.

36.15. Uz tāfeles sākumā uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, … , *n*. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst divus uzrakstītos skaitļus, to vietā uzrakstot viņu vidējo aritmētisko, kas noapaļots uz leju līdz veselam skaitlim. (Piemēram, 3 un 5 aizstāj ar 4; 5 un 6 aizstāj ar 5.). Ar iegūto skaitļu sistēmu atkal atļauts darīt to pašu, utt. Tā rīkojamies, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis:

a) vai tas var būt 1 ?

b) kāda var būt vislielākā šī skaitļa vērtība ?

7. klase

36.16. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=11$$
$$\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=14.$$

36.17. Vai izliektā četrstūrī *ABCD* var vienlaicīgi pastāvēt sakarības

$BC=8,\quad AD=12,\quad AC=9,\quad BD=11$?

36.18. Volejbola turnīrā piedalās 10 komandas. Katra ar katru spēlē vienu reizi. Par uzvaru komanda saņem vienu punktu, par zaudējumu 0 punktus; neizšķirtu nav. Vai var gadīties, ka pēc visu spēļu izspēlēšanas atradīsies tādas četras komandas, kas kopā saņēmušas tieši 4 punktus vairāk nekā pārējās ?

36.19. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa; viena kvadrātiņa malas garums ir 1. Atzīmējam viena kvadrātiņa virsotni *O*. Cik dažādus nogriežņus ar garumu var novilkt tā, lai viens galapunkts atrastos punktā *O*, bet otrs -- kāda kvadrātiņa virsotnē ?

36.20. Vai kāds no skaitļiem

a) $2^{1986}+1986$,

b) $2^{1986}+1985$.

ir pirmskaitlis ?

8. klase

36.21. Atrast tādu funkciju, kuras grafiks iegūstams no funkcijas $y=x^2$ grafika paralēlajā pārnesē un iet caur punktiem (1, 1) un (2, 2).

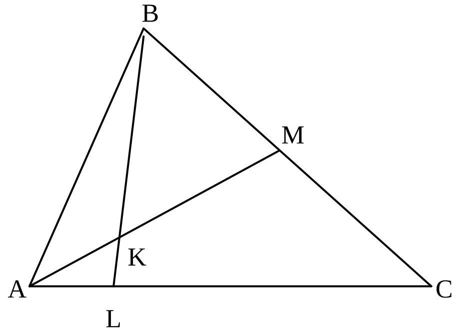
36.22. Trīs no skaitļiem 1001, 1002, 1003, … , 2000 apzīmēti ar *a*, *b* un *c*, bet trīs citi ar *d*, *e* un *f*. Pierādīt, ka nevar gadīties, ka visi skaitļi

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab},\ \frac{b^2+c^2-a^2}{bc},\ \frac{a^2+c^2-b^2}{ac}$$

ir lielāki par visiem skaitļiem

$$\frac{d^2+e^2-f^2}{de},\ \frac{d^2+f^2-e^2}{df},\ \frac{f^2+e^2-d^2}{fe}$$

36.23. Trijstūrī *ABC* novilkta mediāna *AM*. Uz tās ņemts tāds punkts *K*, ka $AK : KM = 1:2$. Taisne *BK* krusto malu *AC* punktā *L*. Atrast attiecību $AL : LC$ (skat. 36.1. zīm.).



36.1.zīm.

36.24. Skaitļi *x* un *y* ir dažādi un apmierina vienādību

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}=\frac{2}{1+xy}.$$

36.25. Augošas skaitļu virknes $a_1, a_2, a_{3,} \ldots$ locekļi ir naturāli skaitļi. Dots, ka $a_1 = 2$ un katram naturālam *k* pastāv vienādība

$$a_{a_k} = 2k+1$$

Aprēķināt a) a_2, b) a_{31}, c) a_{40}.

9. klase

36.26. Kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķautnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ir paralēlas ; *ABCD* ir kuba skaldne. Konstruēt zīmējumā kuba šķēlumu ar plakni, kas iet caur šķautņu *AD* un CC_1 viduspunktiem un skaldnes AA_1B_1B centru.

36.27. Atrisināt nevienādību

$$\frac{(x+1)(x-3)^3\sqrt{5-x}}{x^2-5x+6} \geq 0.$$

36.28. Triju argumentu funkcija $f(x, y, z)$ ir tāda, ka visām *x*, *y* un *z* vērtībām izpildās vienādība

$$f(x, y, z) = 2 \cdot f(z, x, y).$$

Atrast visas šādas funkcijas *f* un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

36.29. Aprēķināt summu

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}.$$

36.30. Doti pieci skaitļi a, b, c, d, e. Zināms, ka starp tiem ir tādi, kas nav nulle. Apskatām visas iespējamās šo skaitļu summas pa trīs:

$$a+b+c,\ a+b+d,\ \ldots,\ c+d+e\ .$$

Kāds ir lielākais iespējamais tādu summu skaits, kuru vērtība ir 0 ?

10. klase

36.31. Dots, ka $\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\beta+\cos\beta$. Pierādīt, ka

$$\sin 2\alpha=\sin 2\beta\ .$$

36.32. Dots, ka *n* un n^3+9 ir pirmskaitļi. Aprēķināt *n*.

36.33. Telpā dotas divas šķērsas taisnes *t* un *s*. Uz taisnes *t* atzīmēti divi punkti *A* un *B*, kuru attālumi līdz *s* ir vienādi savā starpā.
Pierādīt, ka punkti *A* un *B* ir simetriski novietoti attiecībā pret taišņu *t* un *s* kopīgo perpendikulu.

36.34. Vai var atrast tādu punktu *O* un slēgtu lauztu līniju, kas pati sevi nekrusto, ka katrai taisnei, kas iet caur *O* ir tieši 1986 kopīgi punkti ar lauzto līniju ?

36.35. Barons Minhauzens izgudrojis jaunu aritmētisku operāciju, kas katriem diviem reāliem skaitļiem piekārto trešo, un apzīmējis to ar $*$. Ir zināms, ka visiem *x*, *y* un *z* izpildās vienādības

a) $(x+y)(x*y)=x^2*y^2$,

b) $x*y=(x+z)*(y+z)$,

c) $1*0=1$.

Izsakiet Minhauzena izgudroto operāciju ar jau pazīstamām.

11. klase

36.36. Kāds ir lielākais kuba šķautņu skaits, ko var krustot plakne, kas neiet ne caur vienu kuba virsotni ? Pamatot savu atbildi.

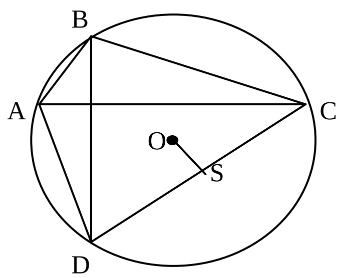
36.37. Dots, ka $f(x) = x^2 + px + q$ (*p* un *q* -- konstanti skaitļi).
Dots, ka vienādojumam $x^2 + px + q$ ir saknes x_1 un x_2, pie tam $x_1 < x_2$. Pierādīt, ka

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot (x_1 - x_2)^3 .$$

36.38. Dots, ka *n* ir naturāls skaitlis. Atrisināt vienādojumu

$$\cos^n x - \sin^{n+1} x = 1 .$$

36.39. Riņķī ievilkts četrstūris *ABCD* ar savstarpēji perpendikulārām diagonālēm (skat. 36.1. zīm.).



36.1. zīm.

Riņķa centrs *O* atrodas četrstūra iekšpusē. Pierādīt, ka *O* attālums līdz malai *CD* vienāds ar pusi no malas *AB* garuma.

36.40. Bezgalīgā naturālu skaitļu virknē (a_n) visiem naturāliem *n* izpildās vienādība

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + a_{n+2}^2}{2}} .$$

Dots arī, ka $a_1 = 1$. Aprēķināt a_{1986}.