Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 37. OLIMPIĀDE

4. klase

37.1. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām rūtiņām.

Kā šo kvadrātu var sagriezt četrās vienādās daļās tā, lai griezumi ietu pa rūtiņu līnijām?

Atrodiet visas iespējas un pierādiet, ka citu bez Jūsu atrastajām nav.

37.2. Aprēķināt izteiksmes $633957 \cdot 46025 + 316043 \cdot 46026$ vērtību.

37.3. Skaitlis 1987 jāizsaka, neizmantojot neko citu kā vien iekavas, aritmētisko darbību zīmes un trijniekus.

a) Kā to var izdarīt ? (Pietiek parādīt vienu piemēru.)

b) Vai to var izdarīt, izmantojot ne vairāk kā 10 trijniekus?

c) Vai to var izdarīt, izmantojot cik patīk daudz trijnieku, bet neizmantojot dalīšanas zīmi?

37.4. Doti kaut kādi 4 dažādi cipari, starp kuriem nav nulles. Pierādīt, ka no tiem var izveidot divus dažādus četrciparu skaitļus (katrs skaitlis satur visus dotos skaitļus) tā, ka abu izveidoto skaitļu starpība nepārsniedz 18.

37.5. Inta izcepa n apaļas pankūkas; tās visas bija dažāda izmēra. Pankūkas kaut kā tika saliktas uz divām pannām, uz katras kolonnā viena virs otras.

Ar vienu gājienu atļauts paņemt no vienas pankūku kolonnas kaut kādu augšējo daļu (varbūt visu kolonnu) un tādā pašā kārtībā pārcelt uz otru pannu virsū tur jau esošajai kolonnai.

Pierādīt, ka ar $2n-1$ gājieniem noteikti var panākt, lai visas pankūkas atrastos uz vienas pannas, pie tam apakšā -- pati lielākā, virs tās -- otra lielākā, utt., paša augšā vismazākā pankūka.

5. klase

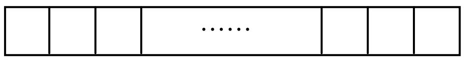
37.6. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Atzīmēt daļu no tām tā, lai katrai no 25 rūtiņām būtu atzīmēts pāra skaits kaimiņa rūtiņu (divas rūtiņas sauc par kaimiņiem, ja tām ir kopīga mala). Pietiek uzrādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

7.7. Katrā no 10 kastēm atrodas smalkais cukurs. No cukura, kas atrodas vienā kastē, var veidot cukura paciņas pa 1 kg katra; ja kastē paliek pāri cukurs, no kura nevar izveidot pilnu paciņu, tad šo cukuru citādi izmantot nedrīkst.
Zināms, ka no katras kastes var izveidot 10 pilnas paciņas cukura. Cik paciņas var izveidot, ja visu cukuru vispirms saber vienā kastē? Atrodiet visas iespējas un pamatojiet, ka citu nav.

37.8. Uz koordinātu taisnes atzīmēti 5 nogriežņi. To labie galapunkti ir 8, $3\frac{1}{2}$, 7, $6\frac{1}{2}$, 5, bet kreisie 0, -2, 2, 4, 3 (nav zināms, kurš kreisais galapunkts atbilst kuram labajam).
Vai var būt, ka visu nogriežņu garumu summa ir 24 ?

37.9. Atrast 1987 veselus pozitīvus skaitļus, kuru summa vienāda ar to reizinājumu; starp skaitļiem drīkst būt arī vienādi.

37.10. Spēles laukums ir lenta, kas sadalīta 1987 kvadrātos (skat. 37.1. zīm.).



37.1. zīm.

Spēlē izmanto 2 vai 3 kauliņus. Divi spēlētāji pēc kārtas izdara pa gājienam. Ar vienu gājienu var vai nu uzlikt jebkurā brīvā rūtiņā kauliņu, kas vēl nav nolikts, vai arī pabīdīt jebkuru jau izliktu kauliņu uz pirmo brīvo rūtiņu pa labi (varbūt pārceļot pāri vienam vai diviem kauliņiem).
Tas, kam nav iespējams izdarīt gājienu, zaudē.
Kas uzvar pareizi spēlējot -- tas, kas izdara pirmo gājienu, vai tas kas izdara otro gājienu. Atrisināt uzdevumu, ja tiek spēlēts ar
a) diviem kauliņiem,
.b) trim kauliņiem.
Uzrādiet, kā jāspēlē, lai uzvarētu.

6. klase

37.11. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Atzīmēt tajā 10 rūtiņas tā, lai 5 rindiņās, 5 kolonnās un abās diagonālēs būtu atzīmētas tieši 2 rūtiņas. Pietiek uzrādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

37.12. Uzzīmēt 8 taisnes tā, lai tām būtu tieši 13 krustpunkti. Pietiek uzrādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

37.13. Koordinātu plaknē uzzīmēti funkciju $y = x + 2$ un $y = -3x + 10$ grafiki; tie sadala plakni 4 daļās. Vai punkti $A\left(1\frac{9}{10}, 4\frac{2}{5}\right)$ un $B\left(2\frac{1}{10}, 4\frac{1}{20}\right)$ pieder vienai vai dažādām daļām ?

37.14. Sniegbaltīte dažus veselos skaitļus uzskata par laimīgiem. Pie tam zināms, ka starp katriem desmit pēc kārtas ņemtiem veseliem skaitļiem vismaz viens ir laimīgs. Pierādīt, ka eksistē tādi 4 dažādi veseli laimīgi skaitļi *a*, *b*, *c* un *d*, ka $a + b = c + d$.

37.15. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 16. Tam pieskaita viņa ciparu summu un rezultātu uzraksta sākotnējā skaitļa vietā. Ar iegūto rezultātu dara to pašu utt. Uz tāfeles pakāpeniski parādās skaitļi

$$16 \to 23 \to 28 \to 38 \to 49 \to 62 \to 70 \to 77 \to \cdots .$$

Vai uz tāfeles kādreiz parādīsies skaitlis 1985198619877?

7. klase

37.16. Atrisināt vienādojumu

$$\frac{(2x-4)(x-3)}{x-2} = 0 .$$

37.17. Aprēķināt izteiksmes vērtību:

$$1987\frac{3}{11}\cdot1988\frac{3}{11} - 1986\frac{3}{11}\cdot1989\frac{3}{11} .$$

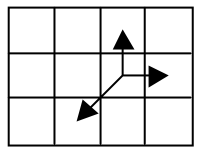
37.18. Kvadrāta *ABCD* iekšpusē atrodas punkts *M*.

Pierādīt, ka $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

37.19. Vai eksistē izliekts piecstūris, kura malu un diagonāļu garumi centimetros izsakās ar skaitļiem 2; 3; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 13;15 ?

37.20. Smaragda pilsētā šaha spēlē izmanto arī īpašu figūru "zaķītis". Ar vienu gājienu "zaķītis var pārvietoties vai nu par vienu lauciņu uz augšu vai par vienu lauciņu pa labi, vai arī pa vienu lauciņu uz leju un pa kreisi. (skat 37.2. zīm.).

A

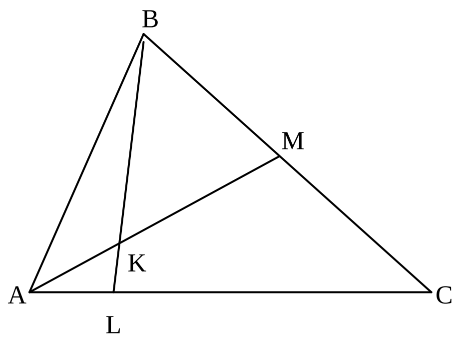


37.2. zīm.

Vai zaķītis ar apstaigāt visas 64 šaha galdiņa rūtiņas tā, lai katrā pabūtu tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgrieztos sākumpozīcijā ?

8. klase

38.21. Trijstūrī *ABC* novilkta mediāna *AM*. Uz tās ņemts tāds punkts *K*, ka $AK : KM = 1 : 2$. Taisne *BK* krusto malu *AC* punktā *L*. Atrast attiecību $AL : LC$ (skat. 37.1. zīm.).



37.1.zīm.

37.22. Desmit bezgalīgas augošas aritmētiskas progresijas katra sastāv no naturāliem skaitļiem. Pirmais loceklis tām visām ir viens un tas pats skaitlis. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudzi naturāli skaitļi, katrs no kuriem sastopams visās progresijās.

37.23. Trijstūrī *ABC* punkts *M* ir malas *BC* viduspunkts. Pierādīt, ka pastāv vienādība

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot \left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}.$$

37.24. Dots, ka $a^2 + ab + ac < 0$. Pierādīt, ka $b^2 > 4ac$.

37.25. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli. Pirmais uzraksta kādu ciparu; otrais pieraksta tam labajā vai kreisajā pusē kādu ciparu; pirmais pieraksta izveidotajam skaitlim labajā vai kreisajā pusē vēl kādu ciparu; utt. Pierādīt, ka pirmais spēlētājs var spēlēt tā, ka neviens skaitlis, kas rodas pēc otrā spēlētāja gājiena, nav vesela skaitļa kvadrāts.

9. klase

37.26. Kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķautnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ir paralēlas ; *ABCD* ir kuba skaldne. Konstruēt zīmējumā kuba šķēlumu ar plakni, kas iet caur šķautņu *AD* un CC_1 viduspunktiem un skaldnes AA_1B_1B centru.

37.27. No dotajiem diviem uzdevumiem tiek vērtēts tikai viens.

37.27.a) Vai eksistē tāds *x*, ka vienlaicīgi pastāv nevienādības

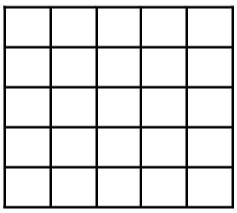
$\sin(ix) < 0$, ja $i = 1; 3; 5; \ldots; 1985$;

$\sin(ix) > 0$, ja $i = 2; 4; 6; \ldots; 1986$;

un $\sin(1987x) > 0$.

37.27.b) Kastē atrodas 100 vienādas formas un materiāla zīmītes, uz kurām uzrakstīts pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 100 (katrs skaitlis uz vienas zīmītes). Andris un Juris reizē uz labu laimi izvelk pa vienai zīmītei.
Ja izvilkto skaitļu summa ir pāra skaitlis, uzvar Andris; ja tā ir nepāra skaitlis, uzvar Juris. Vai abiem Zēniem ir vienādas izredzes uzvarēt ?

37.28. Katrs no 25 kvadrātiņiem (skat. 37.2. zīm.) ir reizē poga un spuldzīte.



37.2. zīm.

Katra poga-spuldzīte var degt vai nedegt. Nospiežot kādu pogu-spudzīti, mainās tās stāvoklis, kā arī to pogu-spuldzīšu stāvoklis, kam ar nospiesto ir kopīga mala (t.i. nedegušās iedegas, bet degušās nodziest).
Sākumā neviena poga-spuldzīte nedeg. Vai var panākt, lai tās visas vienlaicīgi degtu ?

37.29. Kvadrāta malas garums ir 1. Tā iekšpusē atrodas izliekts daudzstūris. Pierādīt, ka tā malu garumu summa nepārsniedz 4.

37.30. Barons Minhauzens izdomājis jaunu aritmētisku operāciju un apzīmējis to ar aplīti $\circ$. Tā pielietojama katriem diviem veseliem skaitļiem, un tās rezultāts ir vesels skaitlis. Ir zināms, ka visiem veseliem skaitļiem x, y un z pastāv vienādība

$$x \circ (y+z) = (y \circ x) + (z \circ x).$$

Pierādiet, ka katriem diviem veseliem skaitļiem a un b pastāv vienādība

$$a \circ b = b \circ a.$$

10. klase

37.31. Dots, ka $\sin x + \cos x = a, \quad \sin y + \cos y = b$.
Aprēķināt $\sin(x+y) \cdot \cos(x-y)$.

37.32. Dots, ka n un $n^3 + 9$ ir pirmskaitļi. Aprēķināt n.

37.33. Veselu pozitīvu skaitļu virknē (a_n) katram naturālam n pastāv vienādība

$$a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1} + a_n).$$

Dots, ka $a_6 = 144$. Aprēķināt a_7.

37.34. Dots kubs K_0. Pievienojam tam visus kubus, kas simetriski kubam K_0 pret kādas K_0 skaldnes plakni. Iegūto figūru apzīmējam ar K_1; K_1 sastāv no 7 kubiem. Pievienojam figūrai K_1 tos kubus, kas vēl neietilpst K_1 un ir simetriski kādam K_1 kubam attiecībā pret kādas K_0 skaldnes plakni; iegūto figūru apzīmējam ar K_2. Pievienojam figūrai K_2 tos kubus, kas vēl neietilpst K_2 un ir simetriski kādam K_2 kubam attiecībā pret kādas K_0 skaldnes plakni.. Iegūto figūru apzīmējam ar K_3.
No cik tādiem kubiem, kas vienādi ar K_0 sastāv K_2? No cik tādiem kubiem, kas vienādi ar K_0 sastāv K_3?

37.35. Desmit rūtiņās ierakstīti katrā pa vienam skaitlim: vienā vieninieks, deviņās -- nulles. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkurus divus skaitļus un katru no tiem aizstāt ar to abu vidējo aritmētisko. Kāds vismazākais skaitlis var parādīties rūtiņā, kurā sākumā bija vieninieks, ja šādus gājienus atkārto daudzas reizes?

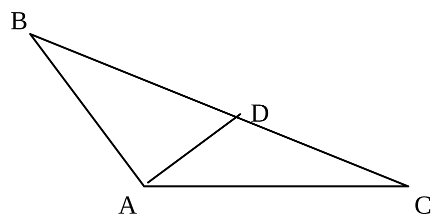
11. klase

37.36. Dots, ka $f(x) = x^2 + px + q$ (p un q -- konstanti skaitļi).
Dots, ka vienādojumam $x^2 + px + q$ ir saknes x_1 un x_2, pie tam $x_1 < x_2$. Pierādīt, ka

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot (x_1 - x_2)^3 .$$

37.37. Vai var atrast galīgu skaitu ģeometrisku progresiju, kas katra ir bezgalīga un sastāv no naturāliem skaitļiem, lai katrs naturāls skaitlis piederētu vismaz vienai no tām?

37.38. Trijstūrī *ABC* dots, ka $AB = CD = 1$, $\angle BAD = 90°$, $\angle DAC = 30°$ (skat. 37.3. zīm.). Aprēķināt *BD*.



37.3. zīm.

37.39. Taisnā trijstūra prizmā M un M_1 ir pamatu mediānu krustpunkti, O -- nogriežņa MM_1 viduspunkts. Caur O novilkta plakne, kas krusto visas prizmas sānu šķautnes.
Pierādīt, ka tā dala prizmas tilpumu uz pusēm.

37.40. Ilīrijā tiek lietota algebriska operācija, kas tiek apzīmēta ar aplīti $\circ$. Šī operācija tiek pielietota visiem skaitļiem, un tās rezultāts arī ir skaitlis. Ir zināms, ka visiem *x* un *y* pastāv vienādības

1) $x \circ (x \circ y) = y$,
2) $(x \circ y) \circ y = x$.

a) Pierādiet, ka katriem diviem skaitļiem *x* un *y* pastāv vienādība

$x \circ y = y \circ x$.

b) Vai var pierādīt, ka katriem trim skaitļiem *a, b* un *c* pastāv vienādība

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$?