Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 38. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

38.1. a) Skaitlis 11.

b) Mums jāzina, cik skaitļu ir izsvītrots līdz tam skaitlim, kuram pēc izsvītrošanas ir 1988. kārtas numurs. Tā kā ir izsvītrots katrs sestais skaitlis, tad atlikušie skaitļi sadalās grupās pa 5 skaitļiem katrā.

1988 skaitļus var sadalīt 397 grupās pa 5 skaitļiem katrā un atliek 3 skaitļi. Tātad izsvītroti ir 397 skaitļi, un 1988-ais skaitlis virknē ir $1988+397=2365$.

38.2. Apzīmēsim mazā kubiņa malas garumu ar 1. Tad lielā kuba virsmas laukums ir $6\cdot 10^2$, bet visu mazo kubu virsmas laukums ir $10^3\cdot 6$; tātad vajadzēs 10 reizes vairāk krāsas, t.i. 10 kg krāsas.

38.3. a) No pēdējiem cipariem redzams, ka $I=0$. Tad $\check{C}\neq 0$ un $T\neq 0$. Bet tādā gadījumā $T=\check{C}=1$, bet tā ir pretruna.

b) Jā, var, piemēram:

	7	0	6	0
	7	0	6	0
—	—	—	—	—
1	4	1	2	0

38.4. Ievērosim, ka $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)=6a+15$ dalās ar 3, bet Andra iegūtais skaitlis ar 3 nedalās, jo tā ciparu summa $1+(1+2+3+\cdots 9)=46$ nedalās ar 3.

38.5. Apzīmēsim sienāžus ar burtiem *A*, *B*, *C*. Viņu izvietojumus uz taisnes sadalīsim divās grupās:

1. grupa: (A, B, C), (B, C, A), (C, A, B);

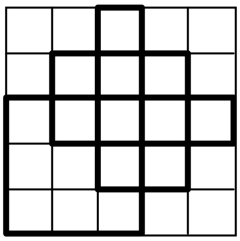
2. grupa: (A, C, B), (B, A, C), (C, B, A).

Redzams, ka pēc jebkura lēciena mainās izvietojumu grupa. Tāpēc pēc 1001 lēciena nav iespējams sienāžu sākotnējais izvietojums.

38.6. Dotā izteiksme pieņem vislielāko vērtību, ja *a* un *c* pieņem vislielāko iespējamo vērtību, bet *b* -- vismazāko. Tātad $a = c = 10$ un $b = -10$. Iegūstam rezultātu $3a - 2b + 7c = 120$.

38.7. Ievērosim, ka $2821 = 7 \cdot 31 \cdot 13$. Mēneša kārtas numurs var būt tikai 1 vai 7. Ja tas būtu 1, tad vecuma un datuma reizinājums būtu $7 \cdot 13 \cdot 31$. Tā kā datums nepārsniedz 31, tad Andra vecums būtu vismaz 91 gads. Tā nevar būt, tāpēc Andris ir dzimis jūlijā un viņa vecuma un datuma reizinājums ir $13 \cdot 31$. Tātad viņa vecums ir 13 gadi un dzimšanas datums ir 31.
Tā kā šis uzdevums formulēts1988. Gada februārī, tad Andris ir dzimis 1974. gada 31. jūlijā.

38.8. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 38.3. zīmējumā.



38.3. zīm.

38.9. Nē, nevar. Ja visu uzrakstīto skaitļu summa būtu 0, tad būtu uzrakstīti 994 skaitļi "+1" un 994 skaitļi "-1"; bet tādā gadījumā to reizinājums būtu "+1".

38.10. Jāņa iegūtais reizinājums dalās ar 9; tātad arī tā ciparu summa dalās ar 9.
Šī ciparu summa ir $77 + *$. Lai šī summa dalītos ar 9 ciparam $*$ ir jābūt vienādam ar 4.

38.11. Taisnei *a* var būt 0, 1, 2, …, 10 taisnes; taisnei *b* -- atbilstoši 10, 9, 8, …, 0 taisnes. Iegūstam, ka krustpunktu skaits var būt 0, $1 \cdot 9 = 9$, $2 \cdot 8 = 16$, $3 \cdot 7 = 21$, $4 \cdot 6 = 24$, $5 \cdot 5 = 25$.

38.12. Caur pieciem punktiem, izvēloties tos pa diviem, var novilkt 10 taisnes. Mūsu gadījumā trīs no tām sakrīt un viena ir perpendikulāra abscisu asij. Tātad pavisam ir 7 funkcijas.

38.13. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katrā grupā skaitļu jādalās ar 9; tātad visu skaitļu summai arī jādalās ar 9, bet $1 + 2 + 3 + \cdots + 25 = \frac{25 \cdot 26}{2} = 325$ nedalās ar 9. Tas nozīmē, ka to izdarīt nevar.

38.14. Nē, nevar. Aplūkosim vienādojumu $ax+b=0$. Sākumā starpība $a-b$ ir mazāka par 0, bet beigās lielāka par 0. Tā kā šī starpība katrā gājienā mainās par 1, tad bija tāds moments, kad $a-b$ bija nulle. Šajā brīdī vienādojuma bija vesela sakne "-1".

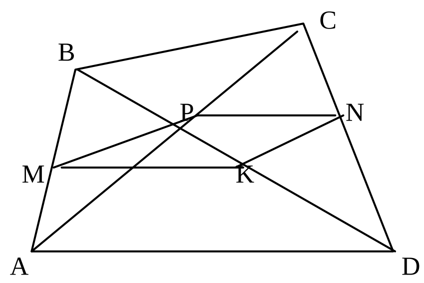
38.15. Nē, nevar. Nokrāsosim punktus 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 15 zilus, bet citus -- baltus. Sienāzis nevar uzreiz no zilā punkta pārlēkt uz zilu. Tātad starp katriem diviem ziliem punktiem, kuros nonāk sienāzis, viņam jānonāk vismaz vienā baltā. No šejienes seko, ka balto punktu skaitam jābūt vismaz 8, bet to ir tikai 7.

38.16. To var izdarīt piemēram šādi:

$$11+\sqrt{45}-\sqrt{121}+\sqrt{5}-\sqrt{80}=11+3\sqrt{5}-11+\sqrt{5}-4\sqrt{5}=0.$$

38.17. Skat . 38.4. zīm.

.



38.4. zīm.

No trijstūru viduslīniju īpašībām seko, ka $MP \parallel BC \parallel KN$ un $MK \parallel AD \parallel PN$. Tātad četrstūris *PNKM* ir paralelograms.

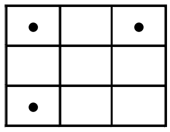
38.18. Apgalvojums seko no vienādības

$$2^6+2^4\cdot 7^5+7^{10}=\left(2^3\right)^2+2\cdot 2^3\cdot 7^5+\left(7^5\right)^2=\left(2^3+7^5\right)^2.$$

38.19. Nē, nevar. Cipari 2, 5 un 8 var atrasties blakus tikai ar cipariem 3 un 9. Tas seko no tā, ka pirmskaitļa otrais cipars nevar būt 2, 5 vai 8. Tālāk aplūkosim skaitļus

21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.

Redzam, ka starp tiem tikai 23 un 29 ir pirmskaitļi; līdzīgi aplūko ciparus 5 un 8.
Tātad cipari 2, 5 un 8 atrodas stūros (skat. 38.5. zīm.).

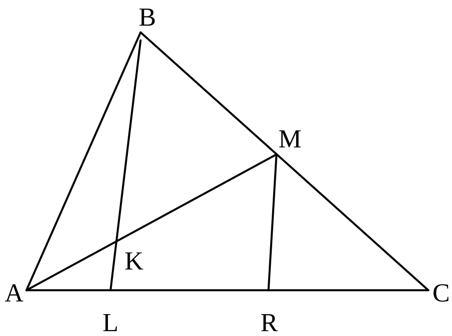


38.5. zīm.

Bet tās četras rūtiņas, kas atrodas blakus atzīmētajām rūtiņām, nevar aizpildīt ar diviem cipariem 3 un 9.

38.20. Nē, nevar. Ja ar vienu gājienu maina divas vienādas zīmes, tad "+" zīmju skaits mainās par 2; pretējā gadījumā "+" zīmju skaits nemainās. Tātad "+" zīmju skaits vienmēr paliks pāra skaitlis, un iegūt prasīto konfigurāciju nav iespējams.

38.21. Aplūkosim 38.3. zīmējumu.



38.3.zīm.

Novelkam $MR||BL$. No Talesa teorēmas seko vienādības

$$\frac{AL}{LR}=\frac{AK}{KM}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{LR}{RC}=\frac{BM}{MC}=1 \quad \Rightarrow \quad LC=2\cdot LR \quad \Rightarrow$$

$$\frac{AL}{LC}=\frac{AL}{2\cdot LR}=\frac{1}{4}.$$

38.22. Juris pirmo jautājumu uzdod par skaitli 6. Iespējamas trīs atbildes:

1) Tev taisnība. Tad viss noskaidrots.

2) Tu esi tālu no taisnības. Tad Andris varēja iedomāties skaitļus 1, 2, 10, 11 vai 12. Nākošo jautājumu Juris uzdod par skaitli 10.

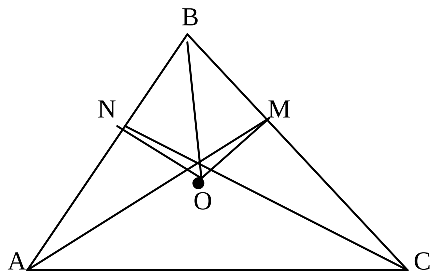
a) Ja atbilde ir "tas ir taisnība", tad viss skaidrs;

b) Abos pārējos gadījumos atlikuši divi skaitļi; skaidrs ka ar diviem jautājumiem tiks iegūta apstiprinoša atbilde.

3) Tu esi tuvu patiesībai. Tad Andris varēja iedomāties skaitļus 3, 4, 5, 7, 8, 9. Nākošo jautājumu Juris uzdod par skaitli 4. Vienīgais gadījums, kad atliek 3 skaitļi ir, ja atbilde ir " Tu esi tuvu patiesībai". Tad šie skaitļi ir 3, 5 un 7.

Tagad varam uzdot jautājumu par skaitli 3. Katra no atbildēm viennozīmīgi norāda, kāds skaitlis iedomāts.

38.23. Apskatīsim 38.4. zīmējumu.



38.4. zīm.

Ar O apzīmēsim ievilktās riņķa līnijas centru; tad ON un OM ir perpendikuli pret atbilstošajām malām. Taisnleņķa trijstūri ONB un OMB ir vienādi, jo $ON = OM$ un OB kopīga hipotenūza. Tātad $BN = BM$; no dotā $AM = CN$. No šejienes seko trijstūru AMB un CNB vienādība (leņķis B tiem ir kopīgs). Tātad $AB = BC$.

38.24. No dotajām vienādībām iegūstam

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2\cdot(xy + xz + yz) = 5^2 - 2\cdot 3 = 19.$$

Ja $z < 1$, tad $x + y > 6$; no šejienes

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} > \frac{36}{2} = 18 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 > 18 + 1 = 19.$$

Iegūta pretruna. Līdzīgi iegūstam pretrunu gadījumā, ja $z > \frac{13}{3}$. Tātad $-1 \leq z \leq \frac{13}{3}$.

38.25. No nevienādības $x^3 - y^3 = 2xy + 8 > 0$ seko, $x > y$.

Ja $y = 0$, tad iegūstam atrisinājumu $x = 2,\ y = 0$.

Uzskatīsim, ka $y \neq 0$. Pieņemsim, ka $x - y \geq 2$. Tad

$$x^3 - y^3 = (x - y)\cdot\left(x^2 + xy + y^2\right) \geq 2\cdot 3xy = 2xy + 4xy \geq 2xy + 12 > 2xy + 8.$$

Tātad prasītā vienādība nevar izpildīties.

Tātad $x - y = 1$. Ievietojot $x = y + 1$ dotajā vienādojumā, iegūstam

$$x^3 - y^3 = (x - y)\cdot\left(x^2 + xy + y^2\right) = y^2 + 2y + 1 + y^2 + y + y^2 = 2y^2 + 2y + 8 \quad \Leftrightarrow$$

$$y^2 + y - 7 = 0.$$

Šim vienādojumam nav atrisinājumu veselos skaitļos. Tātad vienīgais atrisinājums ir $x = 2,\ y = 0$.

38.26. Apzīmēsim ar *K* šķautnes *SA* viduspunktu, ar *L* -- šķautnes *DC* viduspunktu, ar *M* -- skaldnes *SBC* mediānu krustpunktu.

Apzīmēsim ar *R* šķautnes *BC* viduspunktu. Tad plaknē *ASR* atradīsim taišņu *KM* un *AR* krustpunktu *T*.

Tagad piramīdas pamatplaknē mums ir divi punkti *L* un *T*, kas pieder šķēluma plaknei. Novelkot taisni *LT,* iegūstam plaknes šķēluma nogriezni *LP* ar piramīdas pamata plakni ($P \in BC$). Tālākā konstrukcijas gaita ir standarta:

$PM \cap SB = Q$, $PL \cap SD = T$, $TK \cap AD = V$.

Meklētais šķēlums ir piecstūris *PQKVL*.

38.27. Jā, var. Ņemsim skaitļus 2, 2^3, $2^5, \ldots, 2^{2\cdot 1988+1}$. Aplūkosim jebkuru šo skaitļu summu $2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_r}$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$. Šī summa dalās ar 2^{k_1}, bet nedalās ar lielāku divnieka pakāpi; tātad pirmskaitlis 2 ieiet šajā summā kā reizinātājs nepāra pakāpē, un šī summa nav naturāla skaitļa kvadrāts.

38.28.a) Ņemam $x = \pi + \varepsilon$, kur ε -- mazs pozitīvs skaitlis. Tad

$ix = i\pi + i\varepsilon$ (*i* -- naturāls skaitlis).

Ja $i\varepsilon < \pi$, tad pie pāra skaitļiem *i* ir spēkā nevienādība $\sin(ix) > 0$, pie nepāra i -- nevienādība $\sin(ix) < 0$.

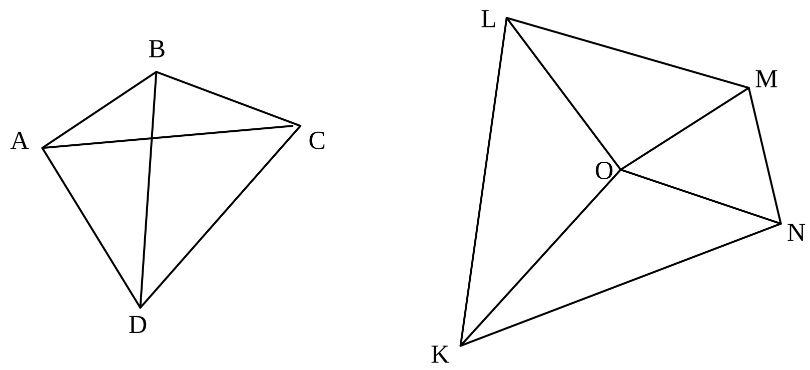
Tātad mūs apmierinās ε, kam izpildās nevienādības

$1986 \cdot \varepsilon < \pi$, $1987 \cdot \varepsilon > \pi$.

Varam ņemt jebkuru ε no intervāla $\left(\frac{\pi}{1987}, \frac{\pi}{1986}\right)$.

38.28.b) Kastē ir 50 pāra skaitļu un 50 nepāra skaitļu. Ja izvelk dažādas paritātes skaitļus (tādu iespēju ir $2 \cdot 50 \cdot 50$), uzvar Juris. Iespēju izvilkt abus pāra skaitļus ir $50 \cdot 49$; iespēju izvilkt abus nepāra skaitļus -- tikpat. Tātad Andrim labvēlīgi ir $2 \cdot 50 \cdot 49$ gadījumi. Redzam, ka Jura izredzes uzvarēt ir lielākas.

38.29. Aplūkosim 38.5. zīmējumu.



38.5. zīm.

No dotā seko, ka $OM = AB, ON = BC, \angle ABC = 180° - \angle MON$; tātad

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} OM \cdot ON \cdot \sin \angle MON = S_{MON} .$$

Līdzīgi pierāda, ka $S_{BCD} = S_{NOK}$, $S_{CDA} = S_{KOL}$, $S_{DAB} = S_{LOM}$.

Summējot šīs vienādības iegūstam

$$S_{MNLK} = S_{MON} + S_{NOK} + S_{KOL} + S_{LOM} =$$
$$S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB} = 2 \cdot S_{ABCD} = 2 \cdot S .$$

38.30. No teorēmas par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko nevienādība

$$bc^2 + ca^2 + ab^2 \geq 3\sqrt[3]{bc^2 \cdot ca^2 \cdot ab^2} = 3abc .$$

Pieņemsim, ka $a \leq b \leq c$. Tad

$$0 \geq (a-b) \cdot (a-c) \cdot (b-c) = b^2c + c^2a + a^2b - bc^2 - ca^2 - ab^2 \quad \Rightarrow$$
$$bc^2 + ca^2 + ab^2 \geq b^2c + c^2a + a^2b.$$

Summējot šīs divas nevienādības, iegūstam

$$2 \cdot (bc^2 + ca^2 + ab^2) \geq b^2c + c^2a + a^2b + 3abc .$$

Ievērosim, ka, lai izpildītos vienādība, arī abām sākotnējām nevienādībām ir jābūt vienādībām. Pirmajā nevienādībā vienādība iespējama tikai, ja $bc^2 = ca^2 = ab^2$.
No šejienes seko, ka $a^2 = bc, b^2 = ac, c^2 = ab$. Pieņemsim, ka nevienādībā $a \leq b \leq c$ kāda nevienādība ir stingra; tad $c^2 > ab$. Iegūta pretruna; tātad $a = b = c$.

38.31. Kāpinot dotās vienādības kvadrātā, iegūstam

$$a^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x \quad \Rightarrow$$
$$\sin 2x = a^2 - 1;$$
$$\sin 2y = b^2 - 1 .$$

Pārveidojot trigonometrisko funkciju reizinājumu summā, iegūstam

$$\sin(x+y)\cdot\cos(x-y)=\frac{1}{2}\left(\sin(x+y+x-y)+\sin(x+y-x+y)\right)=$$

$$\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2y)=\frac{a^2+b^2-2}{2}.$$

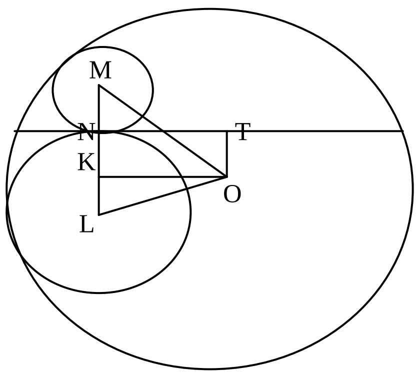
38.32. Pieņemsim pretējo, ka tādus 3 skaitļus izvēlēties nevar. Sakārtosim dotos skaitļus augošā secībā $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$.

Skaidrs, ka $a_1\ge 1$, $a_2\ge 2$ un $a_3\ge 3$.

Ja $a_4<2\cdot 3=6$, tad skaitļu trijnieks a_2, a_3, a_4 apmierinātu uzdevuma nosacījumus; tātad $a_4\ge a_2\cdot a_3\ge 6$.

Līdzīgi iegūstam $a_5\ge a_3\cdot a_4\ge 3\cdot 6=18$, $a_6\ge a_4\cdot a_5\ge 6\cdot 18=108$. Iegūta pretruna ar uzdevuma nosacījumiem; apgalvojums pierādīts.

38.33. Aplūkosim 38.6. zīmējumu.



38.6. zīm.

Apzīmēsim $NT=OK=a$, $OT=h$, riņķa līnijas ω rādiusu ar *R*, riņķa līnijas ω_1 rādiusu ar *x*, riņķa līnijas ω_2 rādiusu ar *y*.

No taisnleņķa trijstūra *OKM* iegūstam:

$$(R-x)^2=a^2+(h+x)^2 \quad\Rightarrow$$

$$R^2-2Rx+x^2=a^2+h^2+2hx+x^2 \quad\Rightarrow$$

$$x=\frac{R^2-a^2-h^2}{2R+2h},$$

No taisnleņķa trijstūra *OKL* iegūstam:

$$(R-y)^2=a^2+(y-h)^2 \quad\Rightarrow$$

$$R^2-2Ry+y^2=a^2+y^2-2yh+h^2 \quad\Rightarrow$$

$$y=\frac{R^2-a^2-h^2}{2R-2h}.$$

No šejienes $\frac{x}{y}=\frac{R-h}{R+h}$; tātad aplūkojamā attiecība nav atkarīga no punkta N novietojuma uz hordas AB.

38.34. Šo vektoru summas garums ir lielāks par 0 un mazāks par 6.

38.35. Ievietojot dotajā vienādībā $x=-1$, iegūstam

$$1+(-1)+(-1)^2+\cdots(-1)^{17}=a_0.$$

No šejienes $a_0=0$.

Aplūkosim doto izteiksmju atvasinājumus. Iegūsim vienādību

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+17x^{16}=$$

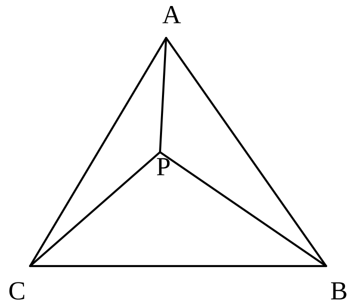
$$a_1+2a_2(x+1)+3a_3(x+1)^2+\cdots+17a_{17}(x+1)^{16}.$$

Ievietojot šajā vienādībā $x=-1$, iegūstam

$$a_1=1+2\cdot(-1)+3\cdot(-1)^2+\cdots+17\cdot(-1)^{16}=$$

$$(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+(15-16)+17=25.$$

38.36. Skat. 38.7. zīmējumu.



38.7. zīm.

Ievērosim, ka $PA+PB>AB>PC$, jo trijstūra iekšpusē jebkurš nogrieznis ir īsāks par trijstūra garāko malu.

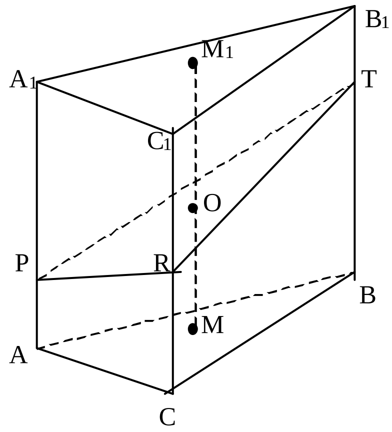
Līdzīgi pierāda, ka $PA+PC>PB$ un $PB+PC>PA$. Tas nozīmē, ka no nogriežņiem PA, PB un PC var izveidot trijstūri.

38.37. Skaitļu kvadrāti pēc moduļa 3 pieņem vērtības 0 un 1. Tātad no kongruences

$$a^2+b^2\equiv 0 \pmod 3$$

seko, ka $a\equiv b\equiv 0 \pmod 3$. Tā kā a un b dalās ar 3, tad a^2 un b^2 dalās ar 9; līdz ar to arī a^2+b^2 dalās ar 9.

38.38. Apzīmējam prizmas pamata laukumu ar *S*. Uzdevuma atrisinājums acīmredzami seko no diviem apgalvojumiem (skat. 38.8. zīm.).

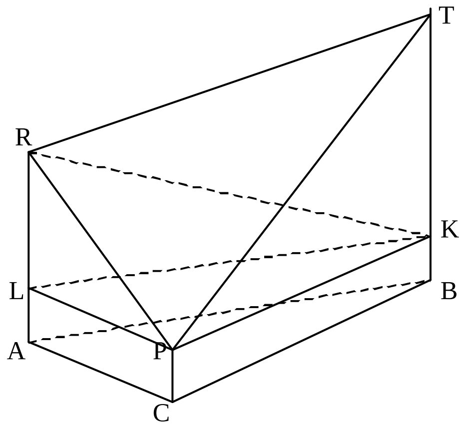


38.8. zīm.

(1) $ABCPTR$ tilpums ir $\frac{1}{3}S\cdot\left(AP+CR+BT\right)$; tad analoģiski $A_1B_1C_1PTR$ tilpums ir $\frac{1}{3}S\cdot\left(A_1P+C_1R+B_1T\right)$.

(2) $AP+CR+BT=3\cdot MC$; tad analoģiski $A_1P+C_1R+B_1T=3\cdot M_1C$.

Uzskatīsim, ka *P* ir viszemākais no punktiem *P*, *R*, *T*. Novelkam caur *P* plakni *PKL*, kas paralēla piramīdas pamata plaknei (skat. 38.9. zīm.).



38.9. zīm.

Ķermenis *PLKRT* sastāv no divām piramīdām *LPKR* un *PRKT*. Otra no tām ir vienliela ar piramīdu *PLKT* (tām ir kopīga skaldne *PKT* un vienādi augstumi pret to, jo *KL* paralēla *PTK*).

Tāpēc $V_{PLKRT}=V_{PLKR}+V_{PLKT}=\frac{1}{3}\cdot S\cdot\left(LR+KT\right)$. Tāpēc

$$V_{ABCPTR} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot (LR + KT) + S \cdot AP =$$

$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot (AP + (LR + AP) + (KT + AP)) = \frac{1}{3} \cdot S \cdot (AP + CR + BT).$$

Pirmais apgalvojums pierādīts.

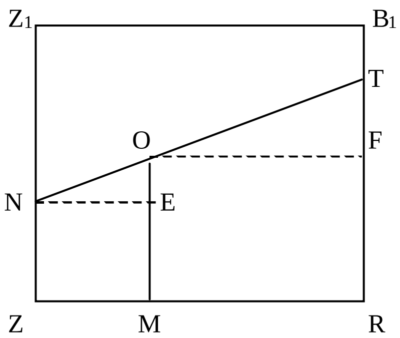
Apskatām prizmas šķēlumu ar plakni BB_1M_1M . Tā krusto šķautnes A_1C_1 un AC to viduspunktos Z_1 un Z, tātad arī PR tā viduspunktā N (skat. 38.10. zīm.).

No trapeces $APRC$ seko, ka $PA + RC + 2 \cdot NZ$.

No trijstūru NEO un OFT līdzības (skat. 38.10. zīm.) seko, ka

$$\frac{OE}{TF} = \frac{NE}{OF} = \frac{ZM}{MB} = \frac{1}{2} \text{, tātad } \frac{OM - NZ}{TB - OM} = \frac{1}{2};$$

no šejienes $2 \cdot NZ + TB = 3 \cdot MO$, tātad $PA + RC + TB = 3 \cdot MO$. Otrais apgalvojums pierādīts.



38.10. zīm.

38.39. Tāda funkcija eksistē. Acīmredzot to pietiek definēt nogrieznī $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ar vērtībām šajā pašā nogrieznī. Tad varam definēt funkciju $f(x)$ pārējiem punktiem šādi: ja $\sin y = \sin x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tad $f(y) = f(x)$; ja $\sin y = -\sin x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tad $f(y) = -f(x)$.

Šo funkciju definēsim šādi:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad \text{ja } x \in \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{ja } x \in \left[1, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right].$$

Pārējos nogriežņa punktos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tātad intervālā $[0, 1]$ punktos funkciju definē induktīvi: ja $a = f(b)$, tad $f(a) = \sin b$; $f(0) = 0$.

38.40. Aplūkosim nepārtrauktu funkciju

$$f(x)=|x-x_1|+|x-x_2|+\cdots+|x-x_n|.$$

No vienādības $|0-x_j|+|1-x_j|=x_j+1-x_j=1$ seko, ka

$$f(0)+f(1)=n.$$

Tātad, ja $f(0)\le\frac{n}{2}$, tad $f(1)\ge\frac{n}{2}$; un otrādi, ja $f(0)\ge\frac{n}{2}$, tad $f(1)\le\frac{n}{2}$.

Tā kā nepārtraukta funkcija nogriezNī $[a,b]$ pieņem visas vērtības no $f(a)$ līdz $f(b)$, tad atradīsies $x=a$, kuram $f(a)=\frac{n}{2}$. Tas arī bija jāpierāda.